



BANCO CENTRAL DO BRASIL

Trabalhos para Discussão

74

Aplicação do Modelo de Black, Derman & Toy à Precificação de Opções sobre Títulos de Renda Fixa

Octavio Manuel Bessada Lion, Carlos Alberto Nunes Cosenza e César das Neves
Maio, 2003

ISSN 1519-1028
CGC 00.038.166/0001-05

Trabalhos para Discussão	Brasília	nº 74	mai	2003	P. 1-39
--------------------------	----------	-------	-----	------	---------

Trabalhos para Discussão

Editado por:

Departamento de Estudos e Pesquisas (Depep)

(E-mail: workingpaper@bcb.gov.br)

Reprodução permitida somente se a fonte for citada como: Trabalhos para Discussão n° 74.

Autorizado por Ilan Goldfajn (Diretor de Política Econômica).

Controle Geral de Assinaturas:

Banco Central do Brasil
Demap/Disud/Subip
SBS – Quadra 3 – Bloco B – Edifício-Sede – 2º subsolo
70074-900 Brasília (DF)
Telefone: (61) 414-1392
Fax: (61) 414-3165

The views expressed in this work are those of the authors and do not reflect those of the Banco Central or its members.

Although these Working Papers often represent preliminary work, citation of source is required when used or reproduced.

As opiniões expressas neste trabalho são exclusivamente do(s) autor(es) e não refletem a visão do Banco Central do Brasil.

Ainda que este artigo represente trabalho preliminar, citação da fonte é requerida mesmo quando reproduzido parcialmente.

Central de Informações do Banco Central do Brasil

Endereço: Secre/Surel/Dinfo
Edifício-Sede – 2º subsolo
SBS – Quadra 3 – Zona Central
70074-900 Brasília (DF)
Telefones: (61) 414 (...) 2401, 2402, 2403, 2404, 2405, 2406
DDG: 0800 992345
Fax: (61) 321-9453
Internet: <http://www.bcb.gov.br>
E-mails: cap.secre@bcb.gov.br
dinfo.secre@bcb.gov.br

Aplicação do Modelo de Black, Derman & Toy à Precificação de Opções sobre Títulos de Renda Fixa

Octavio Manuel Bessada Lion^{*}
Carlos Alberto Nunes Cosenza^{**}
César das Neves^{***}

Resumo

Este artigo apresenta uma aplicação do modelo de Black, Derman & Toy (B,D&T) à precificação de opções sobre títulos de renda fixa. Trata-se de um modelo não-estacionário, aonde a velocidade de reversão à média, ou a volatilidade, ou ambas, são funções do tempo. O modelo possibilita o cálculo do preço livre de arbitragem de contratos derivativos relacionados à estrutura a termo das taxas de juros. A hipótese básica é de que a taxa de juros spot segue um passeio aleatório lognormal (lognormal randomwalk). Utiliza uma árvore binomial recombinante para simular o processo estocástico suposto. Esta árvore é construída de forma a ser consistente com a curva de juros inicialmente observada no mercado. Os resultados obtidos foram consistentes, porém como não existe este tipo de opção no Brasil, não pudemos comparar as respostas fornecidas pelo modelo com preços negociados em mercado.

Palavras-chave: precificação de opções sobre títulos de renda fixa, modelo de Black, Derman & Toy (B,D&T), estrutura a termo da taxa de juros.

JEL Classification: G12, E43, C00

^{*} Departamento de Estudos e Pesquisas, Banco Central do Brasil.

E-mail: Octavio.bessada@bcb.gov.br

^{**} Instituto de Pós-Graduação e Pesquisa em Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

E-mail: cosenza@pep.ufrj.br

^{***} Departamento de Engenharia Industrial da Escola Politécnica. Universidade Federal do Rio de Janeiro. E-mail: cdn@poli.ufrj.br

1. Introdução

A escolha do assunto deste artigo originou-se do conjunto de medidas anunciadas pelo Banco Central do Brasil e Secretaria do Tesouro Nacional, no dia 4 de novembro de 1999, na cartilha “Propostas para o Aprimoramento dos Mercados Primário e Secundário da Dívida Pública Mobiliária”¹. Este documento resultou de ampla consulta realizada junto aos participantes de mercado.

O objetivo das medidas anunciadas pelos órgãos governamentais foi o de atualizar as práticas vigentes do mercado aberto, com a adaptação de novos instrumentos e procedimentos para recuperar e retomar o dinamismo do mercado da dívida pública mobiliária interna, assegurando maior liquidez e visibilidade às operações com títulos públicos federais no mercado secundário.

Procurou-se, portanto, instrumentos e procedimentos alternativos que reduzissem o prêmio na colocação dos títulos em ofertas públicas conduzidas no mercado primário, permitindo a diminuição do custo de financiamento da dívida pública mobiliária interna.

Com o lançamento das opções de venda (*put*) sobre os títulos públicos federais, o Tesouro Nacional, ao criar um limitador de perda para os detentores desses títulos, estaria proporcionando um mecanismo para a redução do risco do mercado, reduzindo, conseqüentemente, o custo de financiamento da dívida pública mobiliária federal interna.

A mais famosa teoria sobre o valor de uma opção está apresentada no trabalho de Black e Scholes [3], conhecido como o Modelo de Black & Scholes (MB&S). O modelo foi desenvolvido logo após o início das atividades do *Chicago Board Options Exchange* (CBOE), em 1973, e parte do pressuposto de que o ativo objeto tem um comportamento estocástico contínuo, na forma de Movimento Geométrico Browniano. Isto quer dizer que a distribuição probabilística dos preços do ativo objeto, em uma data futura, é log-normal e, por conseqüência, a distribuição probabilística das taxas de retorno, calculadas de forma contínua e composta entre duas datas, é normal. O modelo admite, também, que a taxa de

¹ www.bcb.gov.br

juros é constante durante a vida da opção, que o ativo objeto não paga dividendos durante a maturidade da opção e que a volatilidade do preço do ativo objeto é constante.

Por sua fácil implementação, por seus resultados serem de fácil análise e, principalmente, pelo seu rigor teórico, o MB&S se tornou um dos modelos mais usados, em todo o mundo, para a precificação de opções, virando padrão de mercado, ou seja, todos os outros tomam-no como critério de comparação para verificar a sua acuidade. Entretanto, ele é mais bem aplicado aos ativos de renda variável (opções de ações negociadas em bolsas de valores, por exemplo), o que não é o nosso caso neste trabalho.

Os principais motivos que nos fizeram rejeitar o MB&S para a precificação de opções sobre títulos de renda fixa foram:

- i) a distribuição de probabilidade dos preços assumida pelo modelo considera que estes preços possam tomar qualquer valor positivo (entretanto, os títulos prefixados têm um valor preestabelecido de vencimento, ou seja, este é seu valor limite de negociação);
- ii) a pressuposição da constância da taxa spot ao longo da vida da opção (quando é exatamente ela quem deve ser modelada);
- iii) a constância da variância ao longo da vida da opção (para títulos de renda fixa, a volatilidade declina à medida que o título se aproxima da data de seu vencimento).

Devido ao sucesso do MB&S e da conseqüente familiaridade com a suposição lognormal deste modelo, bem como o uso da volatilidade como medida de incerteza, surgiram tentativas de estender esta metodologia a derivativos de taxa de juros. A primeira extensão do modelo de B&S na área de taxa de juros foi o modelo de Black [1], originalmente desenvolvido para avaliar opções sobre futuros de commodities e, posteriormente, aplicado para opções de títulos de renda fixa.

Mas as desvantagens do modelo de B&S para precificar opções sobre títulos de renda fixa continuavam com o modelo de Black, como a pressuposição de taxas

de juros não estocásticas e volatilidade constante. Com o intuito de superar tais limitações foram desenvolvidos modelos que, a partir de pressupostos acerca de variáveis macroeconômicas, descrevem o processo estocástico para a taxa livre de risco de curto prazo, r , num ambiente de neutralidade ao risco.

Inicialmente os modelos de precificação de ativos foram aplicados aos estudos das taxas de juros em uma tentativa de modelar uma estrutura a termo pressupondo incerteza estocástica. Desta forma, a taxa de juros de curto prazo foi definida como a geradora do movimento de toda a estrutura a termo. Esta taxa de curto prazo foi modelada como um processo de Itô em um mundo neutro ao risco:

$$dr = m(r). dt + s(r). dz \quad (1)$$

Assume-se que o desvio instantâneo, m , e que o desvio padrão instantâneo, s , sejam funções determinísticas de r , mas independentes do tempo, e dz é a variação infinitesimal do ativo, que segue o processo de Wiener.

Um dos modelos pioneiros na área foi o proposto por Rendleman e Barter [16], 1980, que trata as taxas de juros de modo similar aos preços dos ativos, como ações:

$$dr(t) = \mu r dr + \sigma r dz \quad (2)$$

onde μ é a taxa de crescimento (constante) e σ é a volatilidade (também constante). No entanto, considerar que a taxa de juro de curto prazo se comporte como o preço de uma ação não é uma suposição ideal. Uma diferença importante entre eles é que as taxas de juros, diferentemente dos preços das ações, parecem retroceder para certo nível médio de longo prazo no decorrer do tempo. Esse fenômeno, conhecido como tendência de retorno à média, não é captado pelo modelo de Rendleman e Barter.

O modelo proposto por Vasicek [20], 1977, incorpora a tendência de reversão à média², e tem a seguinte formulação:

$$dr(t) = a(b-r).dt + \sigma dz \quad (3)$$

onde a taxa de curto prazo, r , reverte a uma taxa de longo prazo b , com velocidade de reversão a . Contudo, este modelo permite que as taxas de juros sejam negativas.

Cox, Ingersoll e Ross [5], 1985, propuseram um modelo alternativo, em que as taxas são sempre não-negativas. O processo neutro ao risco para r em seu modelo é:

$$dr(t) = a(b-r).dt + \sigma \sqrt{r} dz \quad (4)$$

Ele possui o mesmo desvio de tendência de retorno à média do modelo de Vasicek, mas o termo estocástico possui desvio padrão proporcional a \sqrt{r} , o que significa dizer que, conforme aumenta a taxa de juro de curto prazo, o mesmo ocorre com seu desvio padrão. Propuseram a raiz quadrada para a taxa de juros de curto prazo no termo estocástico, de modo a garantir a existência de taxas de juros não negativas, sob a restrição $2ab \geq \sigma^2$.

Jamshidian, [12], 1989, mostrou que as opções de títulos livres de risco sem cupons podem ser avaliadas com o modelo de Vasicek. A partir do método analítico proposto por Vasicek, Jamshidian desenvolveu uma fórmula fechada para o preço de uma opção européia³ de compra, com vencimento em T :

$$c = LP(t,s).N(h) - K.P(t,T).N(h - \sigma_P) \quad (5)$$

Os modelos de equilíbrio citados até agora apresentam a desvantagem de não se adequarem, automaticamente, à estrutura a termo corrente das taxas de juros

² De acordo com Hull [10], "Há fortes argumentos econômicos que favorecem o modelo com retorno à média. Quando as taxas são altas, a economia tende a desacelerar, havendo menos demanda por recursos por parte dos tomadores de empréstimo. Como resultado, as taxas caem. Quando as taxas são baixas, tende a haver uma forte demanda por recursos por parte de tomadores de empréstimo. Em consequência, as taxas sobem."

³ Uma opção é dita européia quando seu exercício só pode se dar na data de vencimento, ao contrário das opções americanas, cujo exercício pode se dar a qualquer momento, até a data de vencimento.

(ETTJ). Para serem consistentes com a ETTJ de mercado, começaram a ser desenvolvidos modelos de não-arbitragens, que utilizam a estrutura inicial de juros como um dado exógeno, derivando um processo para seu comportamento.

Nesta forma de abordagem, o modelo pioneiro foi o de Ho e Lee [9], 1986, apresentado na forma de uma árvore binomial de preços de títulos⁴, conforme a equação a seguir:

$$dr(t) = \theta(t).dt + \sigma.dz \quad (6)$$

onde a variável $\theta(t)$ define a direção média para a qual r se move no instante t , que é independente do nível de r . Como uma aproximação, $\theta(t)$ é igual a $F_t(0,t)$, isto é, a direção média para a qual a taxa de curto prazo estará se movendo no futuro é aproximadamente igual à inclinação da curva a termo instantânea.

Hull e White [11], 1990, desenvolveram um modelo estendido de Vasicek para incorporar a tendência de reversão à média da taxa de juros, conceito este ausente no modelo de Ho e Lee. A maioria dos modelos discutidos na literatura, até então, envolvia apenas uma função do tempo, $\theta(t)$. Alguns pesquisadores, como Hull e White, sugeriram estender os modelos, tornando a taxa de retorno à média, a , ou a volatilidade da taxa, σ , ou ambas, uma função do tempo. Abaixo, a equação do modelo:

$$dr = a \left[\frac{\theta(t)}{a} - r \right] dt + \sigma dz \quad (7)$$

onde a constante a denota a taxa de reversão à média.

⁴ Uma árvore de taxas de juro é uma representação em tempo discreto do processo estocástico para a taxa de curto prazo, da mesma forma que uma árvore de preços de ações é uma representação em tempo discreto do processo seguido pelo preço da ação. Se o intervalo de tempo numa árvore for Δt , as taxas nela colocadas serão as taxas continuamente capitalizadas do período Δt . Quando uma árvore é construída, a suposição usual é que a taxa do período Δt siga o mesmo processo estocástico da taxa instantânea no modelo em tempo contínuo correspondente. A principal diferença entre árvores de taxas de juro e de preços de ações está na forma de realizar o desconto. Numa árvore de preços de ações, a taxa de desconto costuma ser a mesma em cada nó. Numa árvore de taxa de juro, a taxa de desconto varia de nó a nó.

Posteriormente surgiram outros modelos mais elaborados, como o modelo não-estacionário proposto por Black, Derman & Toy [2], também em 1990, nos quais a velocidade de reversão á média, ou a volatilidade, ou ambos, são funções do tempo. A equação de difusão tem a forma:

$$d\log r = \left(\theta(t) + \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \cdot \log r \right) \cdot dt + \sigma(t) \cdot dz \quad (8)$$

que é obtida aplicando-se o lema de Itô no logaritmo da função de t e $z(t)$, que descreve a evolução das taxas de juro:

$$r(t) = e^{\mu(t) + \sigma(t)z(t)} \quad (9)$$

onde $\mu(t)$ é a média da taxa de crescimento da taxa de juros spot entre dois vértices, $\sigma(t)$ é a volatilidade desta taxa de crescimento e $z(t)$ é o processo de Wiener padrão.

Em 1992, Heath, Jarrow e Morton [8] propuseram um modelo lognormal de dois fatores para as taxas a termo. Trata-se de um modelo não-markoviano, ou seja, para se conhecer o comportamento estocástico de r ao longo de um período curto de tempo no futuro, é preciso conhecer o valor de r no início do período e sua trajetória para atingi-lo.

Optamos por trabalhar com o Modelo de Black, Derman & Toy [2], um dos mais recomendados, em todo o mundo, para precificação de instrumentos derivativos sobre taxas de juros. Silva [17] utilizou este modelo para precificar as antigas opções sobre o Futuro de DI (Depósitos Interfinanceiros), extintas em 1997, que tinham características bastante similares às das opções sobre LTN, que tratamos no presente trabalho. Nas próximas três seções apresentamos a sua concepção e modelagem, e, na seção 5, uma simulação da aplicação do modelo sobre opções lançadas sobre Letras do Tesouro Nacional (LTN). Na seção 6 concluímos e sugerimos alguns estudos adicionais.

2. O Modelo de Black, Derman & Toy [2]

A concepção básica do modelo de B,D&T é a de que todos os preços de títulos e taxas dependem somente de um fator – a taxa de juros de curto prazo (taxa spot). As estruturas correntes de taxas de longo prazo e suas volatilidades estimadas são utilizadas para construir uma árvore de possíveis valores futuros para as taxas spot. Esta árvore pode, então, ser usada para avaliar a sensibilidade à taxa de juros dos títulos.

O modelo de um fator implica que todas as taxas de juros se movem na mesma direção, durante qualquer intervalo pequeno de tempo, mas não na mesma proporção. Isso não quer dizer, como se poderia supor, que haja um padrão razoavelmente significativo de estruturas sob o modelo, ou que a curva de juros possua sempre o mesmo formato.

As principais características do modelo são:

- i) trata-se de um modelo de fator único, ou seja, toda a estrutura a termo das taxas de juros é explicada pela evolução da taxa de juros de curto prazo;
- ii) considera que, no vencimento, o ativo objeto tem preço determinado (o processo apresenta reversão à média);
- iii) a estrutura do modelo é binomial e o comportamento da taxa de juros de curto prazo é log-normal.

Dessa forma, tem-se um modelo neutro em relação à probabilidade de subida ou descida da taxa de juros e construído a partir de uma estrutura a termo da taxa de juros (ETTJ) previamente definida. As volatilidades das taxas de juros também devem ser determinadas a priori . Ele pode ser usado para avaliar qualquer título sensível a mudanças na taxa de juros.

Dada uma estrutura a termo e a árvore resultante de taxas spot, o modelo pode ser utilizado para avaliar (apreçar) uma opção sobre um título (*bond option*). Primeiramente são obtidos os preços futuros da obrigação para vários pontos ao longo do tempo. Estes preços serão utilizados para determinar os valores das opções no vencimento.

Dados os valores de uma *call* ou de uma *put* no vencimento, seus valores possíveis antes desta data podem ser obtidos pelo mesmo procedimento de desconto usado para avaliar o título. O modelo também pode ser utilizado para determinar a razão do *hedge* para opções.

Resumindo, o modelo possui três características chave:

1. Sua variável fundamental é a taxa spot, o único fator do modelo, cuja mudança guia todos os preços dos títulos prefixados;
2. O modelo toma como input a estrutura a termo da taxa de juros (ETTJ) e suas volatilidades associadas;
3. O modelo alterna uma variedade de médias e de volatilidades para a taxa spot futura com o objetivo de igualar os inputs. À medida que a volatilidade futura muda, a reversão à média futura também muda⁵.

Por hipótese, mudanças em todos os rendimentos dos títulos são perfeitamente correlacionadas; os retornos esperados de todas as obrigações durante um período são iguais; as taxas spot a qualquer tempo são distribuídas lognormalmente (o que implica não negatividade das mesmas); o processo apresenta reversão à média e não existem taxas e corretagens.

Portanto, a variável-chave a ser modelada é a taxa de crescimento da taxa de juro, ou seja, o retorno da taxa de juros. A estrutura do modelo é binomial e recombinante (por construção), o que o torna computacionalmente simples.

Implantação/operacionalização

A estratégia para precificar opções sobre títulos de renda fixa será a seguinte:

- i) gerar uma árvore binomial de taxas de juros spot que seja compatível com a estrutura a termo e volatilidade atuais, caminhando do presente para o futuro;

⁵ Conceitualmente, um processo é denominado *reversão à média*, se existe uma taxa de juros de longo prazo para a qual tende a de curto prazo.

- ii) usando como critério a valoração neutra em relação ao risco, gerar uma árvore binomial para os preços de diferentes maturidades a partir da árvore binomial gerada para a taxa de juro spot, caminhando na direção inversa do tempo cronológico, ou seja, do futuro para o presente;
- iii) a partir da árvore de preços, gerar a árvore de preços das opções sob a hipótese de valoração neutra ao risco, mais uma vez na direção do futuro para o presente;
- iv) o preço da opção obtido no nó inicial da árvore será seu preço justo (livre de ganhos de arbitragem).

3. Construindo a Árvore

Suponha que exista um título sensível a mudanças na taxa de juros que valha S hoje. Assuma que este preço possa se mover para cima, para S_u , ou para baixo, para S_d , com igual probabilidade, durante o próximo período de tempo. A Figura 1 mostra as mudanças possíveis em S para um passo de 1-ano, começando de um estado aonde a taxa spot é r .

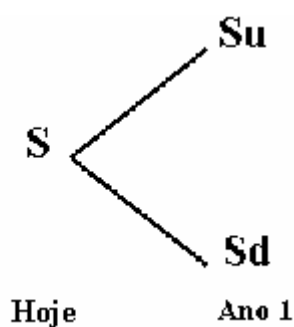


Figura 1

O preço esperado de S um ano a partir de agora é $\frac{1}{2} (S_u + S_d)$. O retorno esperado é $\frac{1}{2} (S_u + S_d) / S$. Como se assumiu que todos os retornos esperados são iguais, e porque se pode emprestar dinheiro à taxa r , deduz-se que:

$$S = \frac{\frac{1}{2}Su + \frac{1}{2}Sd}{1 + r} \quad (10)$$

onde r é a taxa *spot* hoje.

A árvore de 1-passo (Figura 1) pode ser usada para referir-se aos preços de hoje como os preços de um passo mais adiante. Similarmente, podem-se derivar preços um passo no futuro de preços dois passos no futuro. Assim, os preços hoje podem referir-se aos preços dois passos adiante.

Seguindo este caminho, pode-se avaliar um título prefixado de qualquer maturidade, desde que se construa uma árvore de taxas *spot* futuro longa o suficiente. O processo começa com o valor de face (na maturidade) da obrigação e, a partir daí, vai-se obtendo o preço a cada vértice anterior, descontando os preços futuros usando a fórmula de avaliação (10) e a taxa *spot* daquele nó. Indo para trás, até a raiz da árvore, chega-se ao preço hoje.

A partir de uma estrutura a termo (ETTJ) pré-definida, pode-se construir uma árvore de taxas de juros binomial. Esta árvore nada mais é do que uma representação gráfica de 1-período ou taxas *spot* ao longo do tempo.

Para estabelecermos uma notação, a Figura 2 mostra um exemplo de uma árvore de taxas de juros binomial. Nesta árvore, cada vértice representa um período de tempo igual a um (1) ano a partir do vértice à sua esquerda. Cada vértice é designado pela letra N e um subscrito que indica o caminho que a taxa 1-ano tomou para alcançar aquele vértice. L representa a mais baixa (*lower*) das duas taxas 1-ano, e H representa a mais alta (*higher*).

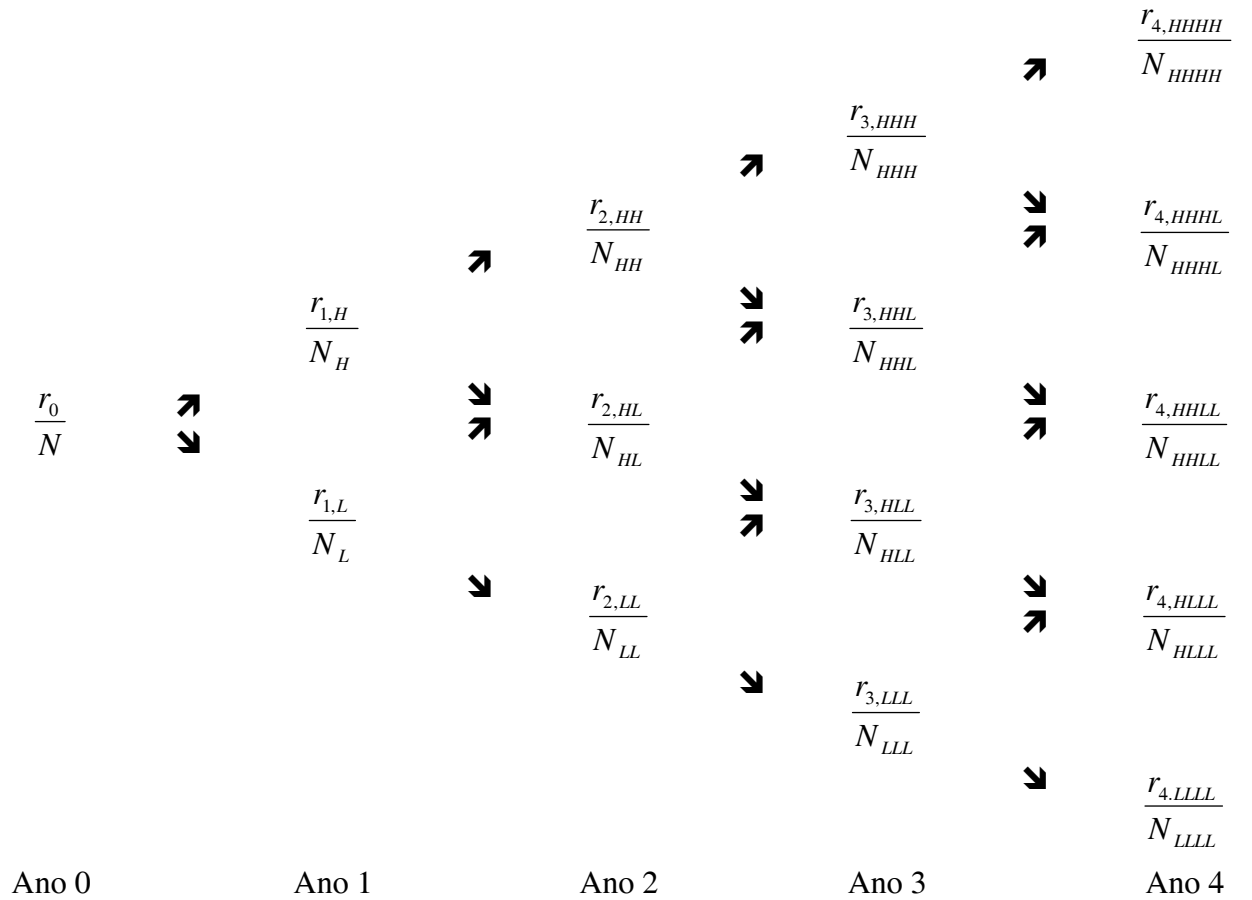


Figura 2

A estrutura binomial e a hipótese de lognormalidade para as taxas de juros implicam que os valores de r_u e r_d têm de satisfazer às seguintes equações:

$$r_u = r_0 \cdot e^{\mu + \sigma}$$

$$r_d = r_0 \cdot e^{\mu - \sigma}$$

Quando dividimos uma pela outra, temos:

$$r_u = r_d \cdot e^{2\sigma} \tag{11}$$

Para descrever a árvore em seu primeiro vértice, vamos utilizar as seguintes notações:

σ_1 = volatilidade assumida para a taxa 1-ano;

$r_{1,L}$ = a taxa 1-ano mais baixa (*lower*), um ano a partir de hoje (é o r_d), e

$r_{1,H}$ = a taxa 1-ano mais alta (*higher*), um ano a partir de hoje (é o r_u).

Aplicando a equação 11 na árvore da Figura 2, construímos a Figura 3 abaixo.

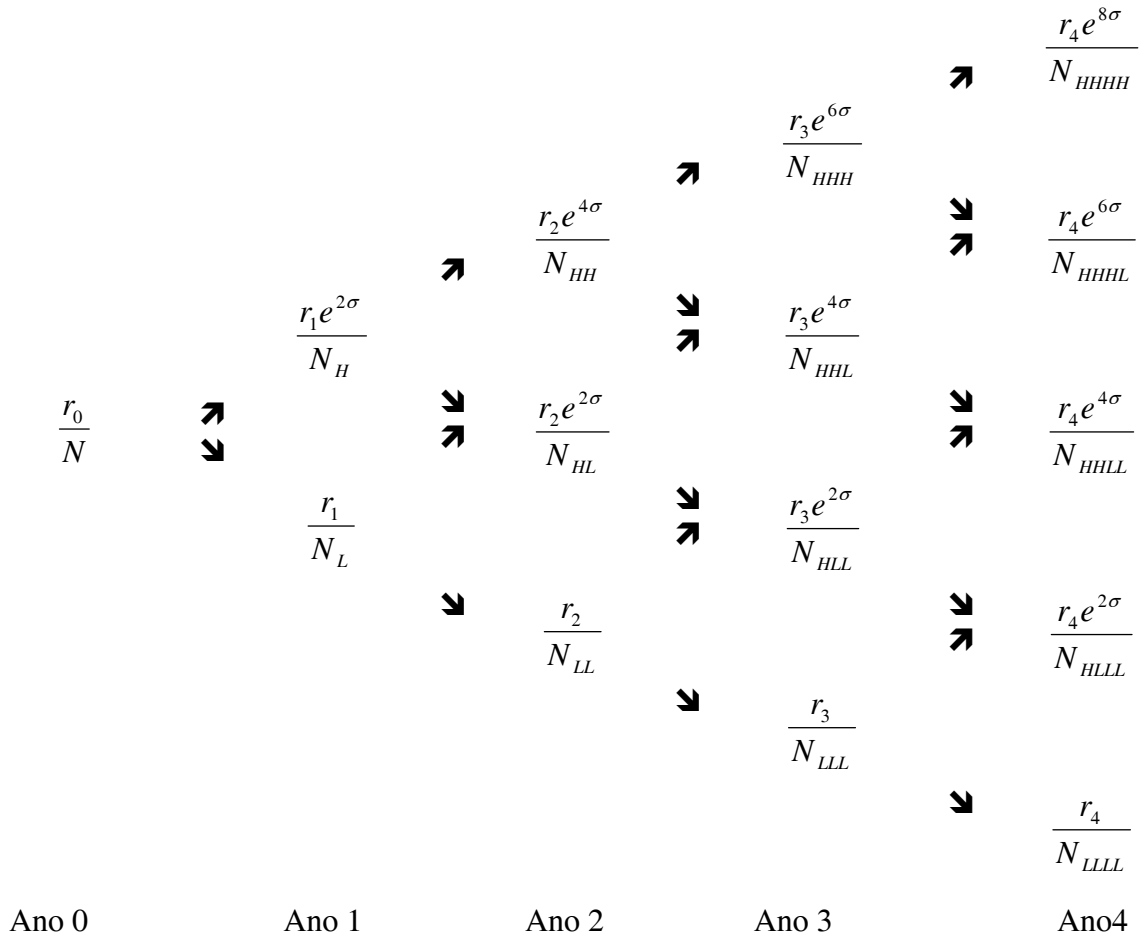


Figura 3

Para achar o valor de um preço do título em um vértice, deve-se, primeiro, calcular o preço deste título nos dois vértices à sua direita (o processo é conhecido como *backward induction*).

4. Obtendo as taxas *spot* a partir da ETTJ predefinida

A estrutura a termo das taxas de juros é cotada em rendimentos e não em preços. O rendimento anual y , hoje, de um N -anos zero, em termos de seu preço S , é dado pelo y que satisfaça a equação abaixo:

$$S = \frac{100}{(1 + y)^N} \quad (12)$$

Similarmente, os rendimentos y_u e y_d um ano a partir de hoje, correspondentes aos preços S_u e S_d , são dados por:

$$S_{u,d} = \frac{100}{(1 + y_{u,d})^{N-1}} \quad (13)$$

O que se pretende é obter as taxas *spot* que assegurem que a estrutura a termo do modelo corresponda à estrutura a termo do mercado hoje.

•Metodologia para o cálculo das taxas *spot*

Inicialmente obtém-se a taxa *spot* única igualando o rendimento 1-ano⁶, quando a taxa *spot* coincide com o valor da taxa de retorno até o vencimento (*yield*). A seguir, calculam-se as duas taxas *spot* 1-ano igualando o rendimento e a volatilidade 2-anos. E assim o processo continua, procurando-se sempre obter as taxas *spot* para daqui a dois anos, três anos, etc, até o final da maturidade do título.

Vamos chamar as três desconhecidas taxas *spot* ao final do segundo ano de r_{uu} , r_{ud} e r_{dd} . Os valores para estas três taxas *spot* devem fazer com que o modelo atinja o rendimento e a volatilidade de um título prefixado de 3 anos, sem pagamento de cupons intermediários. Deve-se igualar, portanto, duas quantidades estimando três taxas *spot*. Isto contrasta com a obtenção das taxas *spot* 1-ano, aonde foram igualadas duas quantidades com duas taxas.

Como regra, o processo de igualar duas quantidades com duas taxas *spot* tem solução única; ou seja, existe somente um conjunto de valores para as taxas *spot*

⁶ Por hipótese, estamos trabalhando com vértices anuais para apresentar o método. Na próxima seção faremos uma aplicação prática utilizando uma Letra do Tesouro Nacional (LTN).

que gera a correta igualdade. Já o caso de se igualar duas quantidades com três taxas *spot* não apresenta solução única. Muitos conjuntos de três taxas *spot* produzem o rendimento e a volatilidade corretos.

Entretanto, o modelo assume que a taxa *spot* é log-normal, com uma volatilidade (do log da variação da taxa *spot*) que depende somente do tempo. Um ano no futuro, quando a taxa *spot* valer r_u ($r_{1,H}$), a volatilidade é igual a $\frac{1}{2}\ln(r_{uu}/r_{ud})$; quando a taxa for r_d ($r_{1,L}$), a volatilidade será igual a $\frac{1}{2}\ln(r_{ud}/r_{dd})$. Como estas volatilidades devem ser as mesmas (é a do vértice), tem de ocorrer que $r_{uu}/r_{ud} = r_{ud}/r_{dd}$, ou seja, $r_{ud}^2 = r_{uu}r_{dd}$.

Não é necessário, então, se fazer três suposições independentes para as taxas. A intermediária, r_{ud} , pode ser obtida a partir das outras duas. Isto significa dizer que, no modelo, basta igualar duas taxas *spot* (r_{uu} e r_{dd}) com duas quantidades (rendimento e volatilidade) de um título prefixado de 3 anos. E esta situação, tipicamente, tem solução única.

O método dá a solução para o cálculo dos valores de uma árvore binomial, não importando quão grande for o seu prazo de maturidade. Por exemplo, vamos calcular as taxas *spot* para um título prefixado de 3 anos (Figura 4):

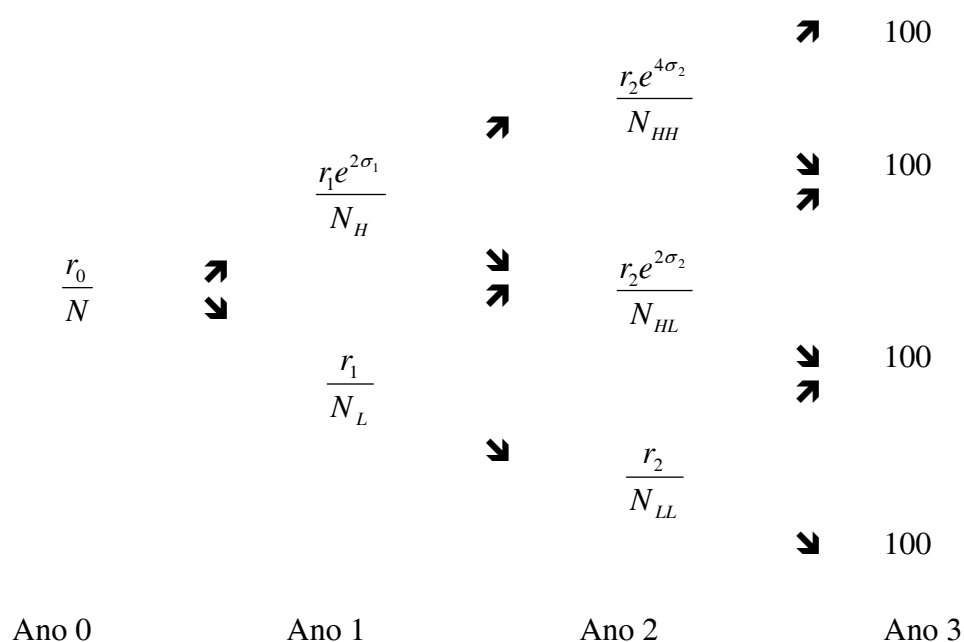


Figura 4

Valor do vértice $N_{HH} = 100/(1 + r_2 \cdot e^{4\sigma})$

Valor do vértice $N_{HL} = 100/(1 + r_2 \cdot e^{2\sigma})$

Valor do vértice $N_{LL} = 100/(1 + r_2)$

Valor do vértice $N_H = [(Valor\ do\ vértice\ N_{HH} + Valor\ do\ vértice\ N_{HL}) \cdot 0,5] / (1 + r_{1,H})$

Valor do vértice $N_L = [(Valor\ do\ vértice\ N_{HL} + Valor\ do\ vértice\ N_{LL}) \cdot 0,5] / (1 + r_{1,L})$

Valor do vértice $N = [(Valor\ do\ vértice\ N_H + Valor\ do\ vértice\ N_L) \cdot 0,5] / (1 + r_0)$

Cálculo do S (fórmula 12), que é o valor do vértice N, a raiz:

$$S = \frac{100}{(1 + y)^3}$$

O y vem da curva de juros (ETTJ) original, dado do problema, a yield para o terceiro vértice.

$$Vértice\ N_H = \frac{\left(\frac{100}{1 + r_2 e^{4\sigma_2}} + \frac{100}{1 + r_2 e^{2\sigma_2}} \right) \cdot \frac{1}{2}}{1 + r_{1,H}}$$

$$Vértice\ N_L = \frac{\left(\frac{100}{1 + r_2 e^{2\sigma_2}} + \frac{100}{1 + r_2} \right) \cdot \frac{1}{2}}{1 + r_{1,L}}$$

$$Vértice\ N = \frac{(Vértice\ N_H + Vértice\ N_L) \cdot \frac{1}{2}}{1 + r} = S$$

Através de método iterativo e sabendo-se que as volatilidades (σ) dos vértices são dadas originalmente, junto com a ETTJ, chega-se ao resultado para r_2 (ou, de acordo com a notação da Figura 2, $r_{2,LL}$). A partir daí, obtemos as outras taxas do vértice 2, utilizando a expressão 11. Portanto, basta obter uma taxa por vértice (utilizando o método iterativo acima apresentado), que as outras taxas saem a partir desta fórmula 11, que deriva da equação que descreve a evolução da taxa de juros (equação 9).

Utilizando procedimento similar, pode-se achar as taxas spot em árvores tão distantes quanto se queira.

5. Aplicando o modelo de B,D&T para Avaliação de Opções sobre Letras do Tesouro Nacional (LTN)

Como ativo referencial da operação trabalhamos com um título de renda fixa prefixada, uma Letra do Tesouro Nacional (LTN), emitida em 07/05/2001, com dois anos de maturidade. A data de exercício das opções⁷ foi estipulada para seis meses após o lançamento do título, seguindo praxe internacional⁸. O objetivo aqui é precificar tais opções, utilizando o modelo de Black, Derman & Toy.

Para a construção da estrutura a termo das taxas de juros, em 07/05/2001, (Tabela 1, abaixo), foram utilizados dados do mercado futuro de DI-1dia (Depósitos Interfinanceiros), *Swaps* e Termo de DI negociados na BM&F - Bolsa de Mercadorias & Futuros.

⁷ Serão analisados os preços tanto para opção de compra (*call*) quanto para opção de venda (*put*).

⁸ No Brasil não existe esta modalidade de opções sobre títulos de renda fixa. O instrumento mais próximo com esta característica são as opções lançadas sobre Índice de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de um dia (IDI) negociadas na Bolsa de Mercadorias & Futuros (BM&F), com pouca liquidez. Veja SILVA [18]

TABELA 1 - CURVA DE JUROS DOMÉSTICA, EM 07/05/01

Vértices (semestrais)	Taxa Spot (%a.a.)
1	20,74
2	21,31
3	21,45
4	21,58

Quando não se tem o preço de mercado negociado diretamente para os prazos dos vértices desejados, recomendamos utilizar o método *Cubic Spline* para fazer a interpolação dos valores, o método mais recomendado para este propósito [14] e [19].

A interpolação por *spline* é um processo de ajuste que gera um caminho suave entre os pontos disponíveis. E, para isso, ele impõe restrições para a determinação dos coeficientes dos polinômios a cada ligação entre dois pontos e entre os polinômios consecutivos. Além de exigir que os polinômios passem pelo mesmo ponto, exige que as primeiras derivadas de cada polinômio calculada neste ponto sejam iguais e que exista a segunda derivada. Isto quer dizer que a reta que tangencia o polinômio anterior é a mesma que tangencia o posterior, eliminando, assim, os "bicos", além de dar uma maior suavidade às mudanças de curvatura. Os pontos passam a ser, portanto, inflexões (ou mudanças de curvatura).

O *spline*, portanto, é um conjunto de polinômios de baixo grau, conectados em certos pontos chamados de nós (*knots*), de modo que formem uma função contínua em um intervalo. Impõem-se limites sobre os nós para que o problema tenha solução; tais restrições buscam também garantir a suavidade da estimação total.

O *spline* mais comum na literatura financeira é o cúbico. Para que as curvas a termo sejam contínuas, é preciso que a curva a vista tenha pelo menos uma derivada contínua. O *spline* quadrático é o de menor ordem para estimar uma curva com essas propriedades. Além disso, se o objetivo for que a curva de juros a termo seja continuamente diferenciável, o *spline* de menor grau a ser utilizado deverá ser o cúbico [19].

5.1. Cálculo do retorno da taxa de juros [15]

Sendo V o valor presente de um fluxo de caixa representativo de uma posição “taxa de juros prefixada”, composto de N fluxos F_i , $i=1,...,N$, r a taxa de juros de capitalização contínua, R a taxa de juros no formato Bacen⁹, T_i o prazo associado ao fluxo i , temos:

$$F e^{-\frac{r_{i,T}}{252}T} = \frac{F}{(1 + R_{i,T})^{T/252}} \Rightarrow r_{i,T} = \ln(1 + R_{i,T})$$

e, fazendo $r_{i,T_i} = r_i$ para simplificar a notação temos:

$$V_i = \sum_{i=1}^N F_i e^{-\frac{r_i}{252}T_i} \Rightarrow \Delta V = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_i e^{-\frac{r_i}{252}T_i}}{\partial r_i} = \sum_{i=1}^N -\frac{T_i}{252} V_i \Delta r_i \text{ (em primeira ordem)}$$

onde $V_i = F_i e^{-\frac{r_i}{252}T_i}$ é o valor presente (marcado a mercado) do fluxo F_i ,

$$\Delta r_i = r_{i,t} - r_{i,t-1} = \ln\left(\frac{1 + R_{i,T_i}}{1 + R_{i-1,T_i}}\right)$$

Portanto, as variações relativas às taxas de juro são tomadas a partir da razão das taxas vigentes para um mesmo prazo, entre datas sucessivas e

$$\Delta r_{i,T} = \ln\left(\frac{1 + R_{i,T}}{1 + R_{i-1,T}}\right) \quad (14)$$

onde $R_{i,T}$ é a taxa de juros anual com composição discreta (considerando 252 dias úteis no ano) para a data t , a incorrer durante o prazo de T dias úteis.

5.2. Cálculo da volatilidade da taxa de juros

Para o cálculo da volatilidade, utilizamos o método do alisamento (amortecimento) exponencial (EWMA – *Exponentially Weighted Moving Averages*), que dá prioridade aos fatos mais atuais, método recomendado pelo sistema *Riskmetrics*.

⁹ Taxa efetiva, anualizada, na hipótese de 252 dias úteis no ano.

Não poderíamos utilizar as volatilidades implícitas às opções, por não existir mercado de opções sobre títulos de renda fixa aqui no país (ou seja, seria inviável qualquer procura amostral).

O uso da média móvel exponencial das observações históricas dos retornos permite capturar, de forma bastante razoável, a dinâmica da volatilidade, onde as últimas observações recebem os maiores pesos para sua estimativa, permitindo a rápida absorção de um choque, com o aumento da volatilidade imediatamente após sua ocorrência, bem como com o seu declínio, de forma exponencial, a medida em que o peso dessa observação é reduzido com o tempo.

Demonstração da forma recursiva do estimador com ponderação exponencial, para facilitar os cálculos:

Sendo p_t o logaritmo neperiano do preço do ativo e r_t sua rentabilidade, supõe-se que: $r_t = p_t - p_{t-1} = \sigma_t \cdot \varepsilon_t$ com $\varepsilon_t \sim N(0,1)$

As hipóteses são de variâncias heterocedásticas e autocorrelacionadas, sendo a assunção de média zero para os retornos, embora não necessária, adotada por simplicidade.

A expressão da média móvel finita é dada por:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(1-\lambda)}{(1-\lambda^T)} \cdot \sum_{t=1}^T \lambda^{t-1} \left(r_t - \bar{r} \right)^2} \quad (15)$$

O parâmetro λ ($0 < \lambda < 1$) é o fator de decaimento que, quanto menor, implica a atribuição de um peso (α) maior aos dados mais recentes.

Uma propriedade interessante do estimador com ponderação exponencial é que podemos obtê-lo de forma recursiva, assumindo que uma série infinita de dados está disponível e que a média dos retornos é zero, como é sugerido no RiskMetrics.

$$\begin{aligned}\sigma_{i,t+1|t}^2 &= (1-\lambda) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i r_{i,t-i}^2 = (1-\lambda) [r_{i,t}^2 + \lambda r_{i,t-1}^2 + \lambda^2 r_{i,t-2}^2 + \dots] = \\ &= (1-\lambda) r_{i,t}^2 + \lambda (1-\lambda) [r_{i,t-1}^2 + \lambda r_{i,t-2}^2 + \lambda^2 r_{i,t-3}^2 + \dots] \\ &= \lambda \sigma_{i,t|t-1}^2 + (1-\lambda) r_{i,t}^2\end{aligned}$$

e, portanto, $\sigma_{i,t+1|t} = \sqrt{\lambda \cdot \sigma_{i,t|t-1}^2 + (1-\lambda) \cdot r_{i,t}^2}$ (10), que é a previsão para t+1 da volatilidade do ativo i, a partir das informações disponíveis até o tempo t.

Para este método do alisamento exponencial trabalhamos com o peso (α) igual a 6% para a observação mais recente¹⁰ (ou seja, $\lambda = 0,94$) e utilizamos uma amostra de 201 taxas de juros para períodos de 126 dias úteis (um semestre)¹¹, que geram 200 observações (retornos), coletadas no período imediatamente anterior ao leilão simulado da LTN de 2 anos. Trabalhamos com conjunto de planilhas Excell e a tabela abaixo apresenta os resultados obtidos:

TABELA 2 -Retornos das "taxas de juros de 126 dias úteis" e o cálculo da sua volatilidade

Data	taxas de 126 dias úteis	Retornos diários	Volatilidade EWMA diária usando a fórmula recursiva	Volatilidade EWMA anualizada	Expoente do decaimento exponencial	Retorno do dia ao quadrado x peso dele para 07/05/2001	Volatilidade = Raiz do somatório dos retornos^2 x pesos	Anualizando a volatilidade
14-jul-00	17,94		0,0000	0,0000				
17-jul-00	17,61	-0,0028	0,0007	0,0109	200	1,9932E-12		
18-jul-00	17,76	0,0012	0,0007	0,0116	199	3,9255E-13		
19-jul-00	17,94	0,0015	0,0008	0,0127	198	6,7255E-13		
20-jul-00	17,56	-0,0032	0,0011	0,0176	197	3,1688E-12		
21-jul-00	17,44	-0,0010	0,0011	0,0175	196	3,2452E-13		
.		
.		
.		
.		
24-abr-01	22,39	0,0004	0,0072	0,1150	8	5,1503E-09		
25-abr-01	22,73	0,0027	0,0071	0,1120	7	2,9285E-07		
26-abr-01	21,15	-0,0130	0,0075	0,1197	6	6,9615E-06		
27-abr-01	20,36	-0,0066	0,0075	0,1188	5	1,8901E-06		
30-abr-01	21,00	0,0054	0,0074	0,1171	4	1,3411E-06		
02-mai-01	21,63	0,0051	0,0073	0,1152	3	1,3188E-06		
03-mai-01	20,60	-0,0085	0,0073	0,1165	2	3,8144E-06		
04-mai-01	20,32	-0,0023	0,0071	0,1133	1	3,0696E-07		
07-mai-01	20,72	0,0033	0,0070	0,1106	0	6,5460E-07	0,0070	0,1106

¹⁰ Valor recomendado pelo *Riskmetrics* [13].

¹¹ Para o cálculo destas taxas foi utilizado o método *Flat Forward*. Este método, muito utilizado pelos participantes do mercado, considera constantes as taxas a termo entre dois contratos adjacentes. Ele também é conhecido como método “*pro rata* do fator diário”. [14].

Assim, o cálculo da volatilidade anual para a "taxa de juros de 126 dias úteis" , utilizando o método EWMA, deu igual a 11,06%.

Para transformar este valor em volatilidade semestral, o dividimos por raiz quadrada de dois¹², que dão 7,82% a.s.. Esta volatilidade será mantida constante para todos os vértices.

5.3 Taxas spot nos vértices semestrais, a partir da ETTJ dada (Tabela 1)

i) N_0

$$r_0 = (1,2074)^{1/2} - 1 = 0,098818$$

ii) N_1

$$S = \frac{1.000}{(1,2131)} = 824,3344$$

$$824,3344 = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1000}{1 + r_1 \cdot e^{2 \cdot x_{0,0782}}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1000}{1 + r_1} \right)}{1,098818}$$

Trata-se de uma equação com uma incógnita. Conforme comentamos, dada a sua não linearidade, não existe uma forma de isolar r_1 . Para resolvê-la é necessário o uso de métodos numéricos, tais como a interpolação de Newton-Raphson ou o método da bisseção.

$r_1 = 0,095943$ (método iterativo)

¹² Volatilidade de N dias = Volatilidade Diária x (N)^{1/2}

Utilizando a equação 11, obtemos a outra taxa deste vértice:

$$r_{1,H} = 0,095943 \times e^{2 \times 0,0782} = 0,112186$$

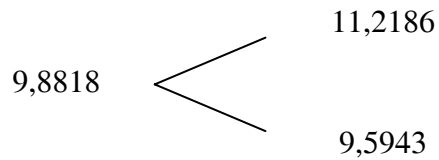


Figura 5

iii) N_2

$$S = \frac{1.000}{(1,2145)^{\frac{3}{2}}} = 747,1430$$

$$747,1430 = +(((500/(1+r_{2,LL} \cdot \text{EXP}(4 \cdot 0,0782)) + 500/(1+r_{2,LL} \cdot \text{EXP}(2 \cdot 0,0782))))/1,112186 + ((500/(1+r_{2,LL} \cdot \text{EXP}(2 \cdot 0,0782)) + 500/(1+r_{2,LL} \cdot \text{EXP}(0 \cdot 0,0782))))/1,095943)) \cdot (1/2))/1,098818.$$

Utilizando método iterativo, o valor do $r_{2,LL}$ convergiu para 0,087970. A partir daí, utilizando a equação 11, obtemos as outras taxas do vértice:

$$r_{2,HL} = 0,087970 \times e^{2 \times 0,0782} = 0,102863$$

$$r_{2,HH} = 0,102863 \times e^{2 \times 0,0782} = 0,120277$$

Esquematisando as taxas calculadas até o presente vértice (3^o):

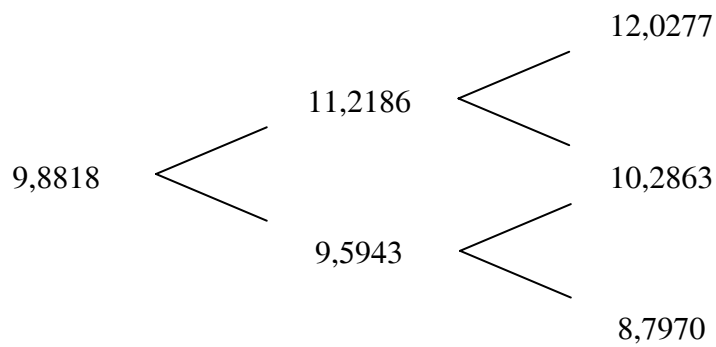


Figura 6

iv) N_3

$$S = \frac{1.000}{(1,2158)^2} = 676,5123$$

$$r_{3,LLL} = 0,082102 \text{ (método iterativo)}$$

$$r_{3,HLL} = 0,082102 \times e^{2 \times 0,0782} = 0,096001$$

$$r_{3,HHL} = 0,096001 \times e^{2 \times 0,0782} = 0,112254$$

$$r_{3,HHH} = 0,112254 \times e^{2 \times 0,0782} = 0,131258$$

A ÁRVORE COMPLETA DAS TAXAS SPOT (ao semestre)

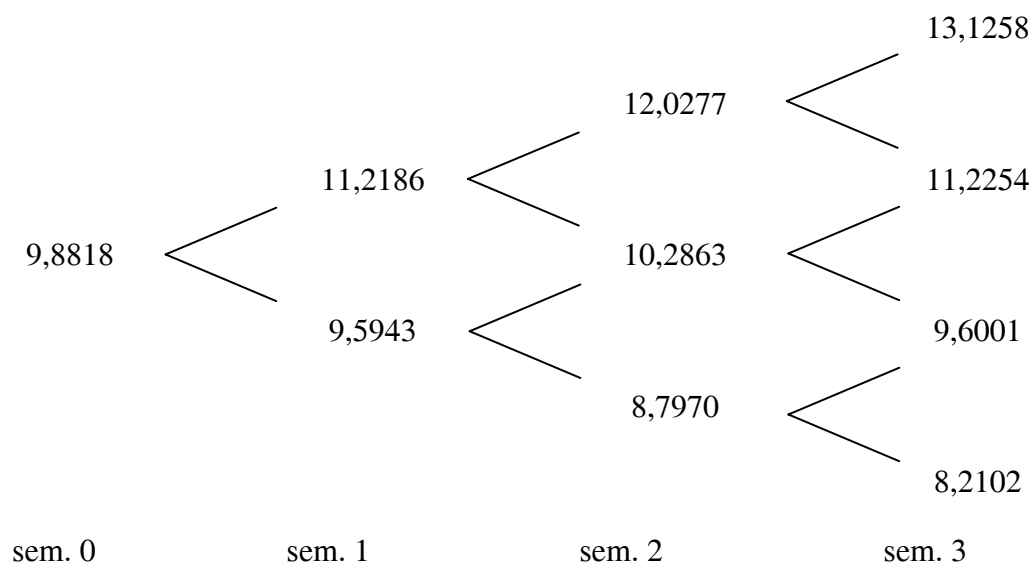


Figura 7

A ÁRVORE COMPLETA DOS PREÇOS DO TÍTULO (vértices semestrais)

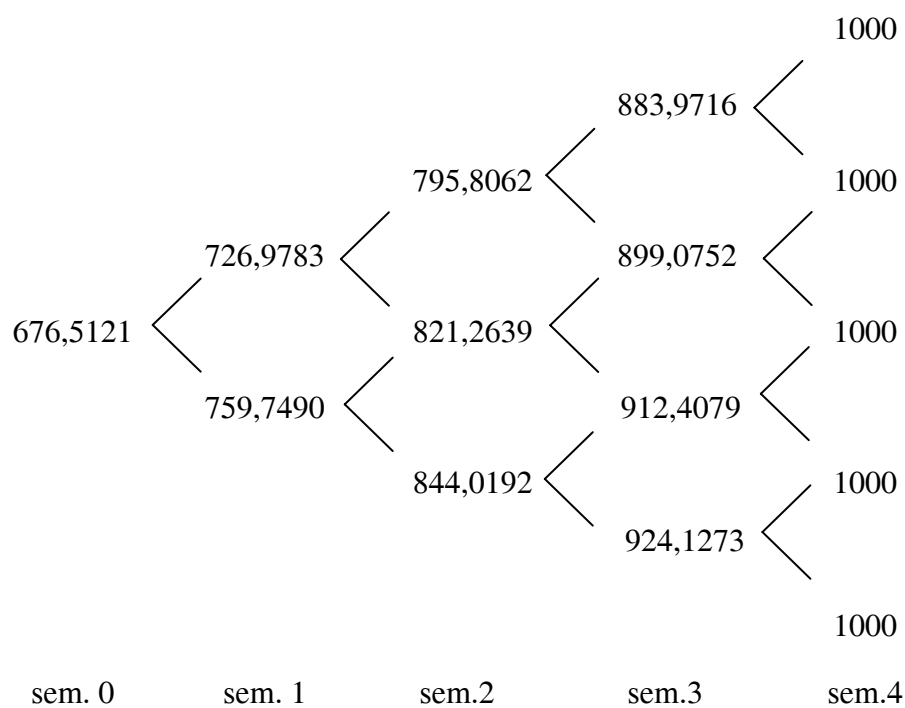


Figura 8

5.4. Precificando as Opções

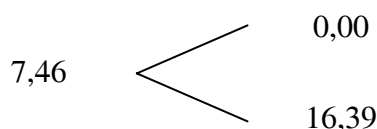
Nesta simulação, o vencimento da opção dar-se-á seis meses após seu lançamento, e seu preço de exercício será afixado em R\$743,3637, o preço “*at the money*”, de acordo com os resultados calculados pelo modelo (a média aritmética dos dois preços: *in the money*, R\$759,7490, e *out of the money*, R\$726,9783).

No vencimento, a opção de compra (*call*) terá valor (opção *in the money*) se o título estiver valendo mais do que seu preço de exercício, ou seja, os R\$759,7490, no caminho das taxas de juros decrescentes¹³. E o valor da *call* será a diferença entre o preço do título e o preço de exercício, ou seja, $759,7490 - 743,3637 = \text{R\$}16,3854$.

A *call* estará *out of the money* (portanto, valendo ZERO), se o título estiver sendo negociado a R\$726,9783 no vencimento (no caminho das taxas ascendentes de juros).

Conhecendo os valores possíveis da *call* no vencimento, utilizamos a fórmula de avaliação (equação 10) para encontrar seu valor hoje.

Árvore dos Valores da Call



O cálculo realizado:

$$\frac{\frac{1}{2}(0,00) + \frac{1}{2}(16,39)}{1,098818} = 7,46$$

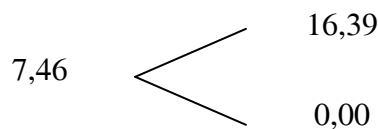
¹³ A compra da *call* fornece ao titular um *hedge* (proteção) contra a baixa das taxas de juros. Assim, no caso dos títulos prefixados, a *call* deve ser comprada pelo emissor.

No vencimento, a opção de venda (*put*) terá valor (opção *in the money*) se o título estiver valendo menos do que seu preço de exercício, ou seja, os R\$726,9783, no caminho das taxas de juros crescentes¹⁴. E seu valor será a diferença entre o preço de exercício e o preço do título, ou seja, $743,3637 - 726,9783 = \text{R\$}16,3854$.

A *put* estará *out of the money* e, portanto, valendo ZERO, se o título estiver sendo negociado a R\$759,7490 no vencimento (no caminho das taxas descendentes de juros).

Como fizemos com a *call*, utilizamos a fórmula 10, de avaliação, para encontrar o valor da *put* hoje.

Árvore dos Valores da *Put*



O cálculo realizado:

$$\frac{\frac{1}{2}(16,39) + \frac{1}{2}(0,00)}{1,098818} = 7,46$$

Os valores da *put* e da *call* deram iguais nesta simulação porque escolhemos o valor de vencimento das opções como sendo o valor *at the money*, por ser o mais imparcial possível. E, neste caso, o valor de exercício será a média aritmética dos dois valores possíveis neste vértice, ou seja, equidistante deles.

Imaginemos, agora, uma simulação em que a opção tivesse seu prazo de maturidade estipulado para um (01) ano, com os mesmos dados do título e das taxas utilizados. Mantendo os vértices semestrais, para dar maior acuidade aos cálculos, o valor de vencimento seria igual a R\$821,2639 (o preço *at the money*).

¹⁴ A compra da *put* fornece ao titular um *hedge* (proteção) contra a alta das taxas de juros. Assim, no caso dos títulos prefixados, a *put* deve ser comprada pelo investidor.

O preço da *call* no vencimento (na hipótese de exercício) seria igual a R\$844,0192 - R\$821,2639, que dão R\$ 22,7553, enquanto que a *put* teria seu preço, no caso de exercício, igual a R\$821,2639 - R\$795,8062 = R\$25,4577. Ao trazê-los a valor presente, a *call* teria seu valor, hoje, igual a R\$4,72 e a *put* R\$5,21.

6. Razão de *Hedge* das Opções (Cálculo do Delta)

Um portfolio estará protegido se o delta¹⁵ deste for igual a zero, indicando que o valor do portfolio não se altera para pequenas mudanças no preço do ativo-objeto. Uma carteira contendo opções mais o ativo subjacente é dita delta neutro quando a soma do delta das opções mais a quantidade do ativo subjacente é zero.

No nosso caso particular, onde estamos analisando títulos de renda fixa e opções sobre eles, quando a taxa de juros se altera, muda o preço do título e o preço das opções.

Para uma *call* valendo C sobre um título com preço T, à razão de *hedge* é igual a:

$$\Delta_{call} = \frac{C_u - C_d}{T_u - T_d} \quad (16)$$

onde C_u e C_d são os valores da *call* um período a partir de hoje, na árvore correspondente às possíveis taxas spot r_u e r_d .

Para o cálculo do delta para as *puts*, basta trocar o C por P na equação 16:

$$\Delta_{put} = \frac{P_u - P_d}{T_u - T_d} \quad (17)$$

¹⁵ O coeficiente delta (Δ) é uma medida da taxa de variação de determinado ativo (ou carteira) derivado (opções), em relação a variações no(s) ativo(s) subjacente(s). O *delta* (Δ) estuda a proporção dessas variações, isto é, em quantas unidades monetárias varia o prêmio da opção, dada uma variação no preço do ativo objeto.

Temos :

$$T_u - T_d = 726,9783 - 759,7490 = - 32,7707$$

$$C_u - C_d = 0,00 - 16,39 = - 16,39$$

$$P_u - P_d = 16,39 - 0,00 = 16,39$$

Levando estes valores nas equações acima, temos, como razão de hedge:

$$\Delta_{put} = \frac{16,39}{-32,77} = -0,50$$

$$\Delta_{call} = \frac{-16,39}{-32,77} = 0,50 \quad e,$$

O que os números dizem é que, para cada 500.000 títulos vendidos, o emissor deve comprar 1.000.000 de opções de compra, para ficar com delta neutro, ou seja, protegido contra alterações na taxa de juros (no caso, a queda lhe é prejudicial).

E o investidor, para cada 500.000 títulos comprados, deve adquirir 1.000.000 de opções de venda, para se proteger contra alterações na taxa de juros (no caso, a alta lhe é prejudicial).

7. Conclusão

Uma das vantagens do modelo de B,D&T é sua simplicidade operacional. Os passos apresentados devem ser implementados em um código de computador que seja capaz de gerar, rapidamente, uma árvore de taxas com o número de vértices que se desejar. Uma vez construída esta árvore, a precificação de qualquer derivativo definido sobre a estrutura a termo se torna relativamente fácil.

Como não existe este mercado de opções sobre títulos de renda fixa no país, não pudemos testar, empiricamente, se os preços calculados pelo modelo convergem para seus valores "justos", isto é, de não arbitragem, premissa do modelo.

Existe a intenção de, em um momento futuro, o governo se valer deste instrumental para tentar revitalizar o mercado secundário de títulos públicos, e, com isto, reduzir o custo de financiamento da dívida pública mobiliária federal interna, conforme comentamos na introdução. Caso isto ocorra, o uso das técnicas aqui apresentadas será de extrema valia para a precificação destas opções e, na sequência das emissões, o modelo poderá, finalmente, ser testado empiricamente, podendo ser "calibrado" para o mercado doméstico.

Como sugestão para novos estudos, em mercados mais gerais faz-se necessária a utilização de modelos mais avançados, multi-fatores com volatilidade estocástica e, às vezes, não markoviano, como, por exemplo, o modelo HJM [8], desenvolvido em 1992 por Heath, Jarrow e Morton, que propuseram um modelo lognormal de dois fatores para as taxas a termo.

Referências Bibliográficas

- 1 BLACK, F., "The Pricing of Commodity Contracts" in JFE, 3, p.167-179, 1976.
- 2 BLACK, F., DERMAN, E., and TOY, W., "A One-Factor Model of Interest Rates and its Application to Treasury Bond Options", Financial Analysts Journal, January-February, 1990, pp. 24-32.
- 3 BLACK, F., SCHOLES, M., "The Pricing of Corporate Liabilities", Journal of Political Economy, maio-junho, 1973, p.637-59.
- 4 CHENEY, W. and KINCAID, D., Numerical Analysis, 2^a edition, ITP, 1996.
- 5 COX, J.C., INGERSOLL, J.E. and ROSS, S.A. "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", Econometrica 53, pp.385-407, 1985.
- 6 DIEGUEZ, J.P., Métodos Numéricos Computacionais para a Engenharia, Âmbito Cultural Edições Ltda., IME/RJ, 1994.
- 7 FABOZZI, F. Treasury Securities and Derivatives. FJF Associates, New Hope, Pennsylvania, 1998.
- 8 HEATH, D., JARROW, R., and MORTON, A. "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates; A New Methodology", Econometrica, 60, 1 (1992), 77-105.
- 9 HO, T.S.Y. and LEE, S.B. "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims", Journal of Finance 41, pp. 1011-1029, December 1986.
- 10 HULL, J., Opções, Futuros e Outros Derivativos, 3^a edição, Prentice Hall, 1997, tradução BM&F – Bolsa de Mercadorias &Futuros, 1998.
- 11 HULL, J. and WHITE, A., "One-Factor Interest Rate Models and the Valuation of Interest Rate Derivative Securities", Journal of Financial and Quantitative Analysis 28, pp. 235-254, June 1990.
- 12 JAMSHIDIAN, F., "An Exact Bond Option Formula", In JF, 44, pp. 205-209, 1989.
- 13 JP Morgan RiskMetricsTM Technical Document, 1996.
- 14 MONTEIRO, A.A. e SALLES, F.M., "Interpolação da Curva de Juros Brasileira: Métodos e Medidas de Desempenho", Resenha BM&F no147, out/dez 2001, pp. 13/27.
- 15 NOTA TÉCNICA REFERENTE A CIRCULAR NO 2972, de 23 de março de 2000, do Banco Central do Brasil. (www.bcb.gov.br)

- 16 RENDLEMAN, R. and BARTTER, B., "The Pricing of Options on Debt Securities", Journal of Financial and Quantitative Analysis 15, pp. 11-24, March 1980.
- 17 SILVA, M.E. "Precificação de Opções sobre o Futuro de DI com o Modelo Black, Derman & Toy", Resenha BM&F no 115, Jan-Fev 1997.
- 18 SILVA, M.E. "Uma Alternativa para Precificar Opções sobre IDI", Resenha BM&F no 119, Set-Out 1997
- 19 VARGA, G. "Interpolação por Cubic Spline para a Estrutura a Termo Brasileira", Resenha BM&F no 140, pp. 29-35, jul-ago/2000.
- 20 VASICEK, O. A. "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", Journal of Financial Economics 5, pp. 177-188, 1977
- 21 21 VIEIRA NETO, C.A., Modelagem da Estrutura a Termo da Taxa de Juros: Dinâmica, Avaliação de Contratos Derivativos, Gerenciamento de Risco e Formulação de Estratégias, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo – USP, 2000.

Banco Central do Brasil

Trabalhos para Discussão

Os Trabalhos para Discussão podem ser acessados na internet, no formato PDF, no endereço: <http://www.bc.gov.br>

Working Paper Series

Working Papers in PDF format can be downloaded from: <http://www.bc.gov.br>

- | | | |
|-----------|---|-----------|
| 1 | Implementing Inflation Targeting in Brazil
<i>Joel Bogdanski, Alexandre Antonio Tombini and Sérgio Ribeiro da Costa Werlang</i> | July/2000 |
| 2 | Política Monetária e Supervisão do Sistema Financeiro Nacional no Banco Central do Brasil
<i>Eduardo Lundberg</i> | Jul/2000 |
| | Monetary Policy and Banking Supervision Functions on the Central Bank
<i>Eduardo Lundberg</i> | July/2000 |
| 3 | Private Sector Participation: a Theoretical Justification of the Brazilian Position
<i>Sérgio Ribeiro da Costa Werlang</i> | July/2000 |
| 4 | An Information Theory Approach to the Aggregation of Log-Linear Models
<i>Pedro H. Albuquerque</i> | July/2000 |
| 5 | The Pass-Through from Depreciation to Inflation: a Panel Study
<i>Ilan Goldfajn and Sérgio Ribeiro da Costa Werlang</i> | July/2000 |
| 6 | Optimal Interest Rate Rules in Inflation Targeting Frameworks
<i>José Alvaro Rodrigues Neto, Fabio Araújo and Marta Baltar J. Moreira</i> | July/2000 |
| 7 | Leading Indicators of Inflation for Brazil
<i>Marcelle Chauvet</i> | Set/2000 |
| 8 | The Correlation Matrix of the Brazilian Central Bank's Standard Model for Interest Rate Market Risk
<i>José Alvaro Rodrigues Neto</i> | Set/2000 |
| 9 | Estimating Exchange Market Pressure and Intervention Activity
<i>Emanuel-Werner Kohlscheen</i> | Nov/2000 |
| 10 | Análise do Financiamento Externo a uma Pequena Economia
Aplicação da Teoria do Prêmio Monetário ao Caso Brasileiro: 1991–1998
<i>Carlos Hamilton Vasconcelos Araújo e Renato Galvão Flôres Júnior</i> | Mar/2001 |
| 11 | A Note on the Efficient Estimation of Inflation in Brazil
<i>Michael F. Bryan and Stephen G. Cecchetti</i> | Mar/2001 |
| 12 | A Test of Competition in Brazilian Banking
<i>Márcio I. Nakane</i> | Mar/2001 |

13	Modelos de Previsão de Insolvência Bancária no Brasil <i>Marcio Magalhães Janot</i>	Mar/2001
14	Evaluating Core Inflation Measures for Brazil <i>Francisco Marcos Rodrigues Figueiredo</i>	Mar/2001
15	Is It Worth Tracking Dollar/Real Implied Volatility? <i>Sandro Canesso de Andrade and Benjamin Miranda Tabak</i>	Mar/2001
16	Avaliação das Projeções do Modelo Estrutural do Banco Central do Brasil Para a Taxa de Variação do IPCA <i>Sergio Afonso Lago Alves</i>	Mar/2001
	Evaluation of the Central Bank of Brazil Structural Model's Inflation Forecasts in an Inflation Targeting Framework <i>Sergio Afonso Lago Alves</i>	July/2001
17	Estimando o Produto Potencial Brasileiro: uma Abordagem de Função de Produção <i>Tito Nícias Teixeira da Silva Filho</i>	Abr/2001
	Estimating Brazilian Potential Output: A Production Function Approach <i>Tito Nícias Teixeira da Silva Filho</i>	Aug/2002
18	A Simple Model for Inflation Targeting in Brazil <i>Paulo Springer de Freitas and Marcelo Kfoury Muinhos</i>	Apr/2001
19	Uncovered Interest Parity with Fundamentals: a Brazilian Exchange Rate Forecast Model <i>Marcelo Kfoury Muinhos, Paulo Springer de Freitas and Fabio Araújo</i>	May/2001
20	Credit Channel without the LM Curve <i>Victorio Y. T. Chu and Márcio I. Nakane</i>	May/2001
21	Os Impactos Econômicos da CPMF: Teoria e Evidência <i>Pedro H. Albuquerque</i>	Jun/2001
22	Decentralized Portfolio Management <i>Paulo Coutinho and Benjamin Miranda Tabak</i>	June/2001
23	Os Efeitos da CPMF sobre a Intermediação Financeira <i>Sérgio Mikio Koyama e Márcio I. Nakane</i>	Jul/2001
24	Inflation Targeting in Brazil: Shocks, Backward-Looking Prices, and IMF Conditionality <i>Joel Bogdanski, Paulo Springer de Freitas, Ilan Goldfajn and Alexandre Antonio Tombini</i>	Aug/2001
25	Inflation Targeting in Brazil: Reviewing Two Years of Monetary Policy 1999/00 <i>Pedro Fachada</i>	Aug/2001
26	Inflation Targeting in an Open Financially Integrated Emerging Economy: the Case of Brazil <i>Marcelo Kfoury Muinhos</i>	Aug/2001

27	Complementaridade e Fungibilidade dos Fluxos de Capitais Internacionais <i>Carlos Hamilton Vasconcelos Araújo e Renato Galvão Flôres Júnior</i>	Set/2001
28	Regras Monetárias e Dinâmica Macroeconômica no Brasil: uma Abordagem de Expectativas Racionais <i>Marco Antonio Bonomo e Ricardo D. Brito</i>	Nov/2001
29	Using a Money Demand Model to Evaluate Monetary Policies in Brazil <i>Pedro H. Albuquerque and Solange Gouvêa</i>	Nov/2001
30	Testing the Expectations Hypothesis in the Brazilian Term Structure of Interest Rates <i>Benjamin Miranda Tabak and Sandro Canesso de Andrade</i>	Nov/2001
31	Algumas Considerações sobre a Sazonalidade no IPCA <i>Francisco Marcos R. Figueiredo e Roberta Blass Staub</i>	Nov/2001
32	Crises Cambiais e Ataques Especulativos no Brasil <i>Mauro Costa Miranda</i>	Nov/2001
33	Monetary Policy and Inflation in Brazil (1975-2000): a VAR Estimation <i>André Minella</i>	Nov/2001
34	Constrained Discretion and Collective Action Problems: Reflections on the Resolution of International Financial Crises <i>Arminio Fraga and Daniel Luiz Gleizer</i>	Nov/2001
35	Uma Definição Operacional de Estabilidade de Preços <i>Tito Nícias Teixeira da Silva Filho</i>	Dez/2001
36	Can Emerging Markets Float? Should They Inflation Target? <i>Barry Eichengreen</i>	Feb/2002
37	Monetary Policy in Brazil: Remarks on the Inflation Targeting Regime, Public Debt Management and Open Market Operations <i>Luiz Fernando Figueiredo, Pedro Fachada and Sérgio Goldenstein</i>	Mar/2002
38	Volatilidade Implícita e Antecipação de Eventos de Stress: um Teste para o Mercado Brasileiro <i>Frederico Pechir Gomes</i>	Mar/2002
39	Opções sobre Dólar Comercial e Expectativas a Respeito do Comportamento da Taxa de Câmbio <i>Paulo Castor de Castro</i>	Mar/2002
40	Speculative Attacks on Debts, Dollarization and Optimum Currency Areas <i>Aloísio Araujo and Márcia Leon</i>	Abr/2002
41	Mudanças de Regime no Câmbio Brasileiro <i>Carlos Hamilton V. Araújo e Getúlio B. da Silveira Filho</i>	Jun/2002
42	Modelo Estrutural com Setor Externo: Endogenização do Prêmio de Risco e do Câmbio <i>Marcelo Kfoury Muinhos, Sérgio Afonso Lago Alves e Gil Riella</i>	Jun/2002

43	The Effects of the Brazilian ADRs Program on Domestic Market Efficiency <i>Benjamin Miranda Tabak and Eduardo José Araújo Lima</i>	June/2002
44	Estrutura Competitiva, Produtividade Industrial e Liberação Comercial no Brasil <i>Pedro Cavalcanti Ferreira e Osmani Teixeira de Carvalho Guillén</i>	Jun/2002
45	Optimal Monetary Policy, Gains from Commitment, and Inflation Persistence <i>André Minella</i>	Aug/2002
46	The Determinants of Bank Interest Spread in Brazil <i>Tarsila Segalla Afanasieff, Priscilla Maria Villa Lhacer and Márcio I. Nakane</i>	Aug/2002
47	Indicadores Derivados de Agregados Monetários <i>Fernando de Aquino Fonseca Neto e José Albuquerque Júnior</i>	Sep/2002
48	Should Government Smooth Exchange Rate Risk? <i>Ilan Goldfajn and Marcos Antonio Silveira</i>	Sep/2002
49	Desenvolvimento do Sistema Financeiro e Crescimento Econômico no Brasil: Evidências de Causalidade <i>Orlando Carneiro de Matos</i>	Set/2002
50	Macroeconomic Coordination and Inflation Targeting in a Two-Country Model <i>Eui Jung Chang, Marcelo Kfoury Muinhos and Joanílio Rodolpho Teixeira</i>	Sep/2002
51	Credit Channel with Sovereign Credit Risk: an Empirical Test <i>Victorio Yi Tson Chu</i>	Sep/2002
52	Generalized Hyperbolic Distributions and Brazilian Data <i>José Fajardo and Aquiles Farias</i>	Sep/2002
53	Inflation Targeting in Brazil: Lessons and Challenges <i>André Minella, Paulo Springer de Freitas, Ilan Goldfajn and Marcelo Kfoury Muinhos</i>	Nov/2002
54	Stock Returns and Volatility <i>Benjamin Miranda Tabak and Solange Maria Guerra</i>	Nov/2002
55	Componentes de Curto e Longo Prazo das Taxas de Juros no Brasil <i>Carlos Hamilton Vasconcelos Araújo e Osmani Teixeira de Carvalho de Guillén</i>	Nov/2002
56	Causality and Cointegration in Stock Markets: the Case of Latin America <i>Benjamin Miranda Tabak and Eduardo José Araújo Lima</i>	Dec/2002
57	As Leis de Falência: uma Abordagem Econômica <i>Aloisio Araujo</i>	Dez/2002
58	The Random Walk Hypothesis and the Behavior of Foreign Capital Portfolio Flows: the Brazilian Stock Market Case <i>Benjamin Miranda Tabak</i>	Dec/2002
59	Os Preços Administrados e a Inflação no Brasil <i>Francisco Marcos R. Figueiredo e Thaís Porto Ferreira</i>	Dez/2002

60	Delegated Portfolio Management <i>Paulo Coutinho and Benjamin Miranda Tabak</i>	Dec/2002
61	O Uso de Dados de Alta Frequência na Estimação da Volatilidade e do Valor em Risco para o Ibovespa <i>João Maurício de Souza Moreira e Eduardo Facó Lemgruber</i>	Dez/2002
62	Taxa de Juros e Concentração Bancária no Brasil <i>Eduardo Kiyoshi Tonooka e Sérgio Mikio Koyama</i>	Fev/2003
63	Optimal Monetary Rules: the Case of Brazil <i>Charles Lima de Almeida, Marco Aurélio Peres, Geraldo da Silva e Souza and Benjamin Miranda Tabak</i>	Feb/2003
64	Medium-Size Macroeconomic Model for the Brazilian Economy <i>Marcelo Kfoury Muinhos and Sergio Afonso Lago Alves</i>	Feb/2003
65	On the Information Content of Oil Future Prices <i>Benjamin Miranda Tabak</i>	Feb/2003
66	A Taxa de Juros de Equilíbrio: uma Abordagem Múltipla <i>Pedro Calhman de Miranda e Marcelo Kfoury Muinhos</i>	Fev/2003
67	Avaliação de Métodos de Cálculo de Exigência de Capital para Risco de Mercado de Carteiras de Ações no Brasil <i>Gustavo S. Araújo, João Maurício S. Moreira e Ricardo S. Maia Clemente</i>	Fev/2003
68	Real Balances in the Utility Function: Evidence for Brazil <i>Leonardo Soriano de Alencar and Márcio I. Nakane</i>	Feb/2003
69	r-filters: a Hodrick-Prescott Filter Generalization <i>Fabio Araújo, Marta Baltar Moreira Areosa and José Alvaro Rodrigues Neto</i>	Feb/2003
70	Monetary Policy Surprises and the Brazilian Term Structure of Interest Rates <i>Benjamin Miranda Tabak</i>	April/2003
71	On Shadow-Prices of Banks in Real-Time Gross Settlement Systems <i>Rodrigo Penalosa</i>	April/2003
72	O Prêmio pela Maturidade na Estrutura a Termo das Taxas de Juros Brasileiras <i>Ricardo Dias de Oliveira Brito, Angelo J. Mont'Alverne Duarte e Osmani Teixeira de C. Guillen</i>	Maio/2003
73	Análise de Componentes Principais de Dados Funcionais – uma Aplicação às Estruturas a Termo de Taxas de Juros <i>Getúlio Borges da Silveira e Octavio Bessada</i>	Maio/2003