

Impactos do Direcionamento de Crédito Sobre a Economia Brasileira: uma abordagem de equilíbrio geral

Gabriel A. Madeira, Mailliw Serafim, Sergio Mikio Koyama,
e Fernando Kuwer

Dezembro de 2018

Trabalhos para Discussão



490

ISSN 1519-1028
CGC 00.038.166/0001-05

Trabalhos para Discussão	Brasília	nº 490	dezembro	2018	p. 1-56
--------------------------	----------	--------	----------	------	---------

Trabalhos para Discussão

Editado pelo Departamento de Estudos e Pesquisas (Depep) – *E-mail*: workingpaper@bcb.gov.br

Editor-chefe: Francisco Marcos Rodrigues Figueiredo – *E-mail*: francisco-marcos.figueiredo@bcb.gov.br

Coeditor: José Valentim Machado Vicente – *E-mail*: jose.valentim@bcb.gov.br

Chefe do Depep: André Minella – *E-mail*: andre.minella@bcb.gov.br

Todos os Trabalhos para Discussão do Banco Central do Brasil são avaliados em processo de *double blind referee*.

Reprodução permitida somente se a fonte for citada como: Trabalhos para Discussão nº 489.

Autorizado por Carlos Viana de Carvalho, Diretor de Política Econômica.

Controle Geral de Publicações

Banco Central do Brasil

Comun/Divip

SBS – Quadra 3 – Bloco B – Edifício-Sede – 2º subsolo

Caixa Postal 8.670

70074-900 Brasília – DF

Telefones: (61) 3414-3710 e 3414-3565

Fax: (61) 3414-1898

E-mail: identidadevisual.comun@bcb.gov.br

As opiniões expressas neste trabalho são exclusivamente do(s) autor(es) e não refletem, necessariamente, a visão do Banco Central do Brasil.

Ainda que este artigo represente trabalho preliminar, citação da fonte é requerida mesmo quando reproduzido parcialmente.

The views expressed in this work are those of the authors and do not necessarily reflect those of the Banco Central or its members.

Although these Working Papers often represent preliminary work, citation of source is required when used or reproduced.

Divisão de Atendimento ao Cidadão

Banco Central do Brasil

Deati/Diate

SBS – Quadra 3 – Bloco B – Edifício-Sede – 2º subsolo

70074-900 Brasília – DF

DDG: 0800 9792345

Fax: (61) 3414-2553

Internet: <http://www.bcb.gov.br/?FALECONOSCO>

Non-Technical Summary

In Brazil, a large portion of the credit to firms, about 40%, is not managed through the standard market mechanisms, but in compliance with a vast set of governmental norms and policies. Those are the so-called earmarking credit policies, which impose destinations for resources, interest rates and other conditions for bank loans. Loans linked to these policies are often subsidized, with interest rates substantially lower than the others. Only about 18% of formal firms are benefited by these loans. However, these firms receive about 80% of total corporate credit from banks. It is reasonable to assume that the effects of these policies on the economy are substantial. To evaluate them, we elaborate an economic model that incorporates the credit earmarking policies practiced in Brazil. Using theoretical and numerical resources recently incorporated into the economic literature, we adjusted the model to the Brazilian data in order to simulate the effects of the removal of credit earmarking policies. Our simulations indicate that the extinction of earmarked credit programs would generate several positive effects, such as increased output and productivity, reduced inequality and financial inclusion. Next, we simulate variations in earmarking policies, evaluating the impacts of giving greater focus to poorer or more productive entrepreneurs. While these changes can lead to improvements, our simulations indicate smaller gains than the mere removal of earmarking programs.

Sumário Não Técnico

No Brasil, uma larga porção do crédito a firmas, cerca de 40%, não é gerido em função dos mecanismos de mercado usuais, mas sim em atendimento a um vasto conjunto de normas e políticas governamentais. São as chamadas políticas de direcionamento de crédito, que estabelecem destinações de recursos, taxas de juros e outras condições para empréstimos. Os empréstimos atrelados a estas políticas são frequentemente subsidiados, com taxas de juros substancialmente inferiores às dos demais. Cerca de 18% das firmas formais são beneficiadas por estes empréstimos. No entanto, estas firmas recebem cerca de 80% do total do crédito bancário a empresas. É razoável supor que os efeitos dessas políticas sobre a economia sejam substanciais. Para avaliá-los, elaboramos um modelo econômico que incorpora as políticas de direcionamento praticadas no Brasil. Usando recursos teóricos e numéricos recentemente incorporados à literatura econômica, ajustamos o modelo aos dados brasileiros com o propósito de simular os efeitos da remoção do crédito direcionado. Nossas simulações indicam que a extinção dos programas de crédito direcionado geraria diversos efeitos positivos, como aumento do produto e da produtividade, redução de desigualdade e inclusão financeira. Em seguida, simulamos variações nas políticas de direcionamento, avaliando os impactos de dar maior foco a empreendedores mais pobres ou mais produtivos. Embora estas mudanças possam gerar melhorias, nossas simulações indicam ganhos menores que a mera remoção dos programas de direcionamento.

Impactos do Direcionamento de Crédito Sobre a Economia Brasileira: Uma Abordagem de Equilíbrio Geral

Gabriel A. Madeira^{*}, Mailliw Serafim^{**},
Sergio Mikio Koyama^{***} e Fernando Kuwer^{****}

Resumo

No Brasil, cerca de 40% do crédito às firmas tem como origem recursos oriundos de políticas de direcionamento. Estes empréstimos são fortemente subsidiados, com taxas de juros substancialmente inferiores às dos demais. Embora apenas cerca de 18% das firmas formais sejam beneficiadas por estes empréstimos, firmas que tomam crédito direcionado recebem a maior parte (cerca de 80%) dos empréstimos bancários a empresas no Brasil. É razoável supor que os efeitos dessas políticas sobre a economia sejam substanciais. Para avaliá-los, construímos um modelo de equilíbrio geral com agentes heterogêneos e restrições de crédito, que incorpora regras de direcionamento que buscam replicar as políticas praticadas no Brasil. Com o apoio de técnicas recentes de solução numérica de modelos dinâmicos, ajustamos o modelo a dados de crédito e emprego por firma e examinamos o efeito da remoção das políticas de direcionamento. O modelo prevê que a extinção dos programas de crédito direcionado geraria diversos efeitos positivos, como aumento do produto e da produtividade, redução de desigualdade e inclusão financeira. Em seguida, examinamos variações nas políticas de direcionamento, avaliando os impactos de dar maior foco a empreendedores mais pobres ou mais produtivos. Embora essas mudanças possam gerar melhorias, nossos resultados apontam ganhos menores que a mera remoção dos programas de direcionamento.

Palavras-chaves: Sistema Financeiro, Banco de Desenvolvimento, Desenvolvimento Econômico, Desigualdade, Produtividade.

Classificação JEL: G 28, O 11, D 31, E 21, E 22.

Este Trabalho para Discussão não deve ser citado como representando as opiniões do Banco Central do Brasil. As opiniões expressas neste trabalho são exclusivamente do(s) autor(es) e não refletem, necessariamente, a visão do Banco Central do Brasil.

* Universidade de São Paulo

** Mestre em teoria econômica pela USP

*** Banco Central do Brasil

**** University of British Columbia

1 Introdução

Mercados de crédito e os demais instrumentos de intermediação financeira são fundamentais para o bem-estar dos indivíduos e o desenvolvimento econômico dos países em múltiplas dimensões. Impulsionam a produtividade e o crescimento econômico ao viabilizar projetos produtivos. Contribuem para a mobilidade social e a superação de desigualdades ao permitir investimentos por indivíduos com poucos recursos. Geram segurança e bem-estar ao permitir proteção contra choques adversos. No Brasil, não se pode avaliar a eficácia da intermediação financeira em produzir esses benefícios sem que se considere políticas de direcionamento de crédito. No ano de 2015, cerca de 40% do crédito utilizado pelas firmas teve como origem recursos oriundos de políticas de direcionamento. As taxas de juros desses empréstimos são consideravelmente menores do que as taxas cobradas no mercado de crédito livre, devido a fortes subsídios implícitos ou explícitos. A distribuição destes recursos está longe de ser homogênea. Apenas cerca de 18% das firmas formais no Brasil têm contratos de crédito direcionado. No entanto, estas firmas recebem cerca de 80% do total de crédito bancário para empresas (entre crédito livre e direcionado). Dada a magnitude dos programas de direcionamento de crédito, é razoável supor que eles afetem substancialmente um amplo conjunto de variáveis econômicas, e que seus efeitos se estendam muito além das firmas diretamente beneficiadas por eles.

Este artigo avalia os impactos de longo prazo das políticas de direcionamento sobre a economia brasileira. Com este objetivo, construímos e calibramos um modelo dinâmico de equilíbrio geral com escolha ocupacional ao qual incorporamos regras de direcionamento que buscam replicar as políticas praticadas no Brasil. Considerando-se que as políticas de direcionamento não se distribuem homogeneamente entre firmas e que o crédito é particularmente relevante para alguns tipos de indivíduos, como empreendedores com bons projetos mas pouco capitalizados, o modelo incorpora heterogeneidade entre agentes econômicos em três dimensões: riqueza, talento e disponibilidade de crédito direcionado¹. O modelo é rico o suficiente para gerar previsões sobre impactos do direcionamento sobre uma ampla gama de variáveis econômicas, incluindo produtividade, desigualdade, empreendedorismo e uso de ins-

¹ Conforme mostra Banerjee (2003), há evidência empírica de que os impactos do funcionamento imperfeito do mercado de crédito recai de forma diferente entre os indivíduos. Tipicamente os mais ricos são capazes de tomar maiores volumes emprestados e pagar taxas de juros menores. Banerjee e Duflo (2010) constroem alguns modelos simples para explicar a heterogeneidade em taxas de juros. A interação entre as imperfeições no mercado de crédito e outras variáveis, como a renda e riqueza, podem afetar os impactos das fricções financeiras na economia e o resultado de intervenções.

trumentos financeiros. Essa riqueza impõe importantes desafios computacionais, mas o arcabouço inovador para modelos em tempo contínuo proposto por Achdou et al. (2017), torna o problema tratável. De fato, a formulação adotada é suficientemente eficaz para permitir que os parâmetros do modelo sejam escolhidos de maneira a gerar um bom ajuste a um rico conjunto de dados sobre crédito e firmas à disposição do Banco Central do Brasil (BCB).

Na ausência de externalidades ou imperfeições de mercados (como em Lucas (1978)), intervenções, como o direcionamento de crédito, fatalmente geram ineficiências, o que torna tais programas injustificáveis. No entanto, mercados de crédito são fortemente afetados por fricções, sejam elas derivadas de assimetrias informacionais ou de comprometimento limitado (ver por exemplo Paulson, Townsend e Karaivanov (2006)). Havendo fricções no mercado de crédito, não é em princípio claro se políticas como o direcionamento trazem maiores benefícios ou prejuízos ². Em nosso modelo, incorporamos um tipo de fricção facilmente tratável que é comum na literatura a ele associada: limitações na capacidade de endividamento resultantes de comprometimento limitado (similarmente às apresentadas em Banerjee e Duflo (2010)). Nessas condições, apesar de seus efeitos potencialmente distorcivos, subsídios podem contribuir para aliviar restrições de crédito.

Os efeitos do direcionamento sobre a economia são estimados a partir de exercícios contrafactuais em que removemos as políticas de direcionamento em versões calibradas do modelo. Em todos os exercícios efetuados, o modelo prevê que a retirada de direcionamento geraria ganhos de produtividade, melhorias na distribuição de renda, aumentos de salários e inclusão financeira. Em seguida, avaliamos efeitos de variações nas regras de direcionamento, apreciando os impactos de aumentar a participação de indivíduos com menor riqueza ou maior produtividade entre os que recebem crédito direcionado. Embora alguns destes exercícios gerem melhorias nos resultados do direcionamento, eles ainda apresentam resultados menos positivos do que a mera remoção dos programas.

Nosso trabalho contribui para a vasta literatura recente que avalia impactos de imperfeições no mercado de crédito sobre a produtividade agregada. A literatura

² Stiglitz (1993) destaca que a evidência da efetividade das intervenções governamentais é mista, sendo possível que a política implementada gere ainda mais distorções ao invés de resolver o problema. Além disso, tais programas podem falhar em atingir seus objetivos devido a problemas de agência gerados pelos incentivos inerentes ao setor público, conforme aponta Banerjee (1997).

de crescimento econômico (por exemplo Banerjee e Duflo (2005), Alfaro, Charlton e Kanczuk (2008), Restuccia e Rogerson (2008) e Hsieh e Klenow (2009)) reconhece que a alocação sub-ótima de recursos produtivos entre firmas (usualmente chamada de *misallocation*) é responsável por uma larga parcela das diferenças de produtividade entre países. Conforme demonstram Banerjee e Moll (2010), restrições de crédito podem gerar alocação sub-ótima de recursos produtivos ao impedir a equalização das produtividades marginais do capital entre as firmas (*misallocation* na margem intensiva), além de levar indivíduos que idealmente deveriam ser empreendedores a trabalhar como assalariados (*misallocation* na margem extensiva). Alguns estudos empíricos orientados por modelos sugerem que melhorias no sistema financeiro têm um potencial significativo de geração de ganhos de produtividade. Estimativas feitas por Jeong e Townsend (2007) sugerem que cerca de 75% dos ganhos de produtividade ao longo de 20 anos na Tailândia são resultantes de aprofundamento financeiro e realocações ocupacionais associadas. Usando microdados da economia americana, Midrigan e Xu (2014) encontram resultados indicativos de que, embora fricções financeiras gerem um efeito modesto de *misallocation* na margem intensiva, seus impactos negativos sobre produtividade são substanciais quando se considera seu efeito inibidor de entrada de firmas e adoção de novas tecnologias.

Neste artigo, o interesse não é estudar o impacto de restrições de crédito, mas sua interação com políticas que têm como um de seus objetivos mitigá-las. Assim também procedem Buera, Moll e Shin (2013), que analisam o caso em que crédito subsidiado é dado para os empresários mais produtivos em um contexto em que a produtividade evolui de forma estocástica no tempo. No curto prazo, tais programas têm o efeito desejado, aumentando o produto e a produtividade. Mas, no longo prazo, conforme a produtividade dos indivíduos que acessam o crédito direcionado reverte para a média, a decisão de entrada das firmas é distorcida, permitindo que empresários pouco produtivos se mantenham ativos e impedindo indivíduos mais produtivos de entrarem no mercado. Portanto, esses programas geram perda de produto e queda da produtividade no longo prazo. Similarmente, Buera, Kaboski e Shin (2012) estudam o caso no qual o governo implanta programas de microcrédito para favorecer pequenas empresas. Usando um modelo de equilíbrio geral, os autores chegam à conclusão que os programas de microcrédito elevam a produtividade, porém tal efeito é contrabalanceado por uma menor acumulação de capital gerada pela transferência de renda de indivíduos mais ricos para os mais pobres. O efeito líquido é um pequeno aumento do produto per capita. Contudo, a maioria da população é beneficiada pelo programa analisado, na medida em que ele eleva os salários de

equilíbrio.

Alguns trabalhos já trataram das políticas de direcionamento de crédito no Brasil. Usando microdados em painel, Bonomo, Brito e Martins (2015) analisam os impactos do direcionamento ao nível das firmas, buscando identificar quais firmas se beneficiaram da expansão do crédito direcionado após a crise de 2008 no Brasil. Encontra-se que os maiores beneficiados pelos programas foram as empresas antigas, grandes e avessas ao risco. Além de tais firmas serem capazes de obter crédito a taxas de juros mais altas no mercado privado, o acesso às menores taxas presentes nas linhas de crédito direcionado não se traduz em aumento de investimento por parte delas, mas sim em uma maior lucratividade. Lazzarini et al. (2014) também examinam o processo de concessão de crédito pelo Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social (BNDES). Seus resultados indicam que o BNDES seleciona firmas com alta capacidade de repagamento, assim como o sistema bancário privado. No entanto, há indício de favorecimento a empresas com maior conexão política (medida pela contribuição a campanhas eleitorais).

Efeitos de equilíbrio geral, como os aqui considerados, também já foram avaliados na literatura sobre o caso brasileiro. Souza-Sobrinho (2010) utiliza um modelo de agente representativo para analisar a variação do bem-estar que ocorreria após o encerramento dos programas de direcionamento. Conclui-se que o fim dos programas de direcionamento levaria a uma diminuição de juros aos investidores e ganhos de bem-estar da ordem de 2% do consumo corrente. O trabalho mais próximo deste artigo é o de Antunes, Cavalcanti e Villamil (2015), que acrescenta heterogeneidade entre agentes à análise. Em seu modelo dinâmico de equilíbrio geral com restrições de crédito, há um custo fixo de *setup* para se contratar crédito direcionado. Seus resultados não indicam efeitos quantitativos significativos sobre o produto per capita, mas apontam para efeitos negativos sobre salários, desigualdade e finanças públicas. Nosso artigo contribui a esta literatura ao impor maior heterogeneidade e flexibilidade à análise, o que permite aderência a um rico conjunto de dados e maior riqueza nos exercícios contrafactuais.

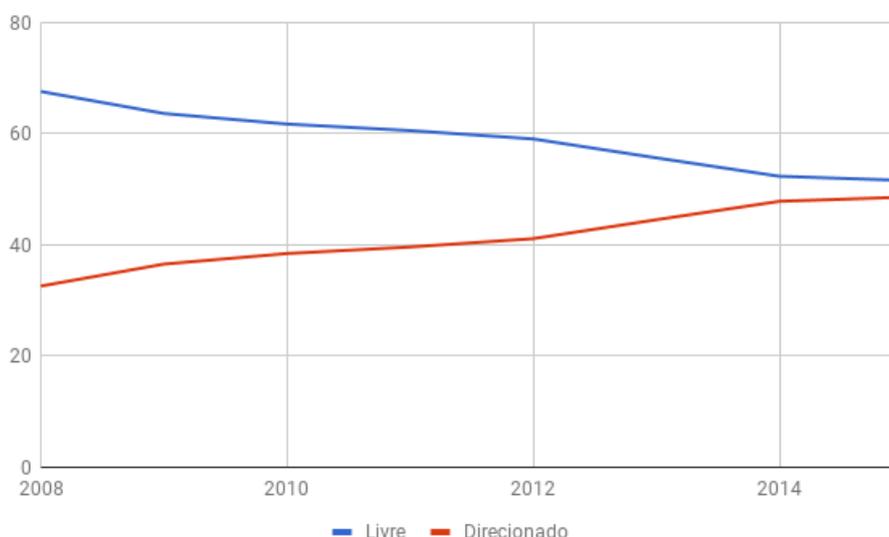
Além desta introdução, o trabalho contém cinco seções. A seção 2 descreve o ambiente institucional do crédito direcionado no Brasil. A seção 3 descreve o modelo, define o equilíbrio e apresenta o método de solução do modelo. Na seção 4 o modelo é calibrado. Na seção 5 são realizados exercícios contrafactuais por meio da alteração dos parâmetros da política de crédito. Por último, a seção 6 apresenta as conclusões

do trabalho.

2 O Crédito Direcionado para Firmas no Brasil

O mercado de crédito bancário brasileiro apresenta uma combinação única de forte intervencionismo estatal e rica disponibilidade de dados que gera oportunidades promissoras de se estudar os efeitos de políticas públicas sobre os mercados financeiro e a economia. Há expressiva participação de bancos públicos e de direcionamento de crédito. Conforme mostra a figura 1, em 2007 o crédito direcionado correspondia a cerca de um terço do mercado de crédito brasileiro. Após a crise de 2008, sua participação cresceu e em 2015 ele já respondia por aproximadamente metade do mercado de crédito bancário do Brasil.

Figura 1 – Saldo de crédito livre e direcionado como % do Total

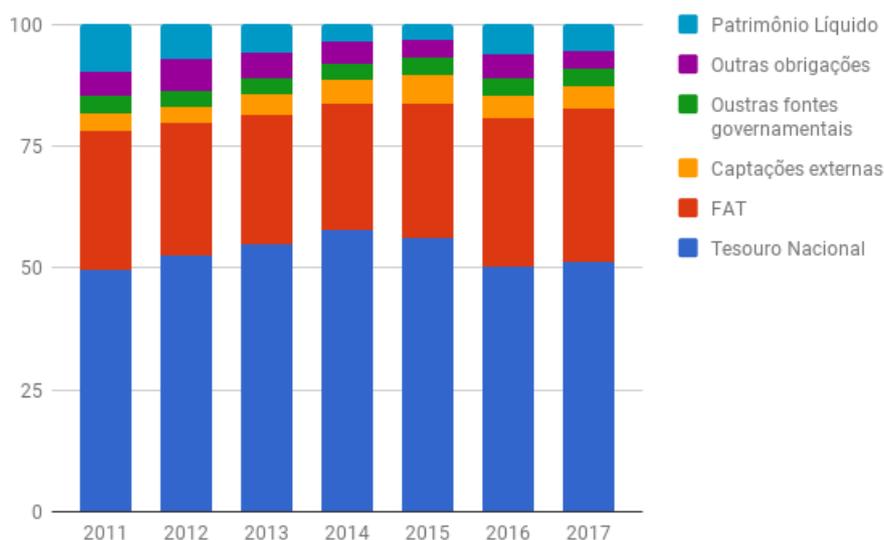


Fonte: Banco Central, elaboração própria.

A maior parte do crédito direcionado destinado a pessoas jurídicas, cerca de 70%, tem recursos originários do BNDES, conforme mostram Pazarbasioglu-Dutz et al. (2017). O BNDES é um banco de fomento do governo federal, cuja principal função é conceder crédito para financiar projetos das firmas nacionais e internacionais. As principais fontes de recurso do BNDES são o FAT (Fundo de Amparo ao Trabalhador)

e o Tesouro Nacional. O FAT consiste em um fundo que recebe poupança forçada dos trabalhadores, coletada por meio de contribuições incidentes sobre a folha salarial. Já o financiamento por meio do Tesouro Nacional ocorre por meio de emissão de dívida pelo governo federal. A figura 2 mostra a composição das fontes de recurso do BNDES entre 2011 e 2017.³

Figura 2 – Fontes de recurso do BNDES (em percentagem)



Fonte: BNDES, elaboração própria.

Nota-se que, nos últimos anos, o Tesouro Nacional respondeu por cerca da metade dos recursos do BNDES e o FAT por cerca de 30%. Como ao longo deste período tanto o FAT como o Tesouro eram remunerados pelo BNDES segundo a TJLP (Taxa de Juros de Longo Prazo), uma taxa inferior às taxas de mercado, havia um subsídio implícito nos empréstimos do banco, que recaía, em sua maior parte, sobre o conjunto dos contribuintes e trabalhadores formais.⁴

O BNDES concede crédito para firmas de duas formas: por meio de operações diretas e indiretas. Cerca de metade do crédito concedido pelo BNDES se dá por meio

³ Dados disponíveis nos Relatórios Anuais do BNDES

⁴ A TJLP foi instituída pela Medida Provisória nº 684, de 31.10.94, publicada no Diário Oficial da União em 03.11.94, sendo definida como o custo básico dos financiamentos concedidos pelo BNDES. A TJLP é fixada pelo Conselho Monetário Nacional e divulgada até o último dia útil do trimestre imediatamente anterior ao de sua vigência. Desde janeiro de 2018, a TJLP foi substituída, segundo a lei 13.483/2017, pela Taxa de Longo Prazo (TLP) para novos contratos. A lei estabelece a eliminação progressiva do subsídio implícito na TLP.

das operações diretas⁵. Nessas operações, as empresas negociam diretamente com o banco de fomento os prazos, as taxas de juros e os demais termos do contrato. Vale notar que as empresas que acessam o crédito direcionado dessa forma estão entre as maiores do país. Já nas operações indiretas, o BNDES, que não tem agências próprias em todas as Unidades Federativas (UFs), utiliza o sistema financeiro nacional para facilitar o acesso aos clientes. Nessa modalidade, agentes financeiros autorizados se encarregam de encontrar os clientes elegíveis ao crédito direcionado. O BNDES repassa os recursos para o agente financeiro que assume o risco da operação e fica obrigado a remunerar o banco de fomento segundo a TJLP. Nessas operações, o agente financeiro tem liberdade para selecionar os clientes e fica livre para negociar a taxa de juros e os demais termos do contrato. Dessa forma, o crédito direcionado concedido por meio de operações indiretas cria uma taxa de captação alternativa no sistema financeiro. Apesar de responder por metade do volume do crédito concedido pelo BNDES, as operações indiretas são cerca de 97% das número de total de operações⁶.

Para construirmos nossa análise sobre os impactos do direcionamento de crédito, usamos informações referentes ao ano de 2012⁷ de duas bases de dados à disposição do BCB. A primeira é o Sistema de Informações de Crédito (SCR), do BCB, que reúne todas as informações a respeito dos contratos de crédito de clientes com saldo devedor superior a mil reais em algum banco. A segunda é o Relatório Anual de Informações (RAIS), produzida pelo Ministério do Trabalho e Previdência Social, que possui informações sobre emprego e salários em cada firma. As duas bases foram fundidas pelo BCB, gerando uma nova base que permite observar as decisões de saldo de crédito em conjunto com o número de trabalhadores contratados de um total de 2.594.208 firmas formais.

A tabela 1 mostra a distribuição de tamanho das firmas, com maior prevalência de micro e pequenas empresas⁸. Note-se que são contabilizadas todas as firmas

⁵ Dado disponível no Sistema Gerenciador de Séries Temporais (SGS) do BCB.

⁶ A grande disparidade entre participação de repasses no número de operações e no volume total de empréstimos resulta do fato de que o montante médio emprestado por operação direta do BNDES é muito maior que o montante médio emprestado em repasses.

⁷ O BCB dispõe de dados mais recentes, mas optamos por ajustar o modelo a um período de relativa estabilidade.

⁸ Curiosamente, há um número semelhante de firmas médias e grandes. A princípio, espera-se que a quantidade de firmas grandes seja significativamente menor que o número de firmas médias. Tal fato pode ocorrer devido ao critério utilizado para definir o tamanho da firma ser o número de trabalhadores contratados. Caso se adotasse um critério de faturamento, possivelmente tal idiosincrasia desaparecesse.

que estão reportadas na RAIS, mesmo que elas não tenham registro no SCR⁹.

Tabela 1 – Distribuição do tamanho das firmas

Tamanho da firma	Proporção no total de firmas
Micro	80,5%
Pequenas	16,1%
Médias	1,7%
Grandes	1,7%

Fonte: Banco Central, elaboração própria.

Tabela 2 – Distribuição das formas de financiamento

Forma de financiamento	Proporção no total de firmas
Não utilizam crédito bancário	49,2%
Utilizam apenas crédito livre	32,7%
Utilizam apenas crédito direcionado	1,8%
Utilizam crédito livre e direcionado	16,3%

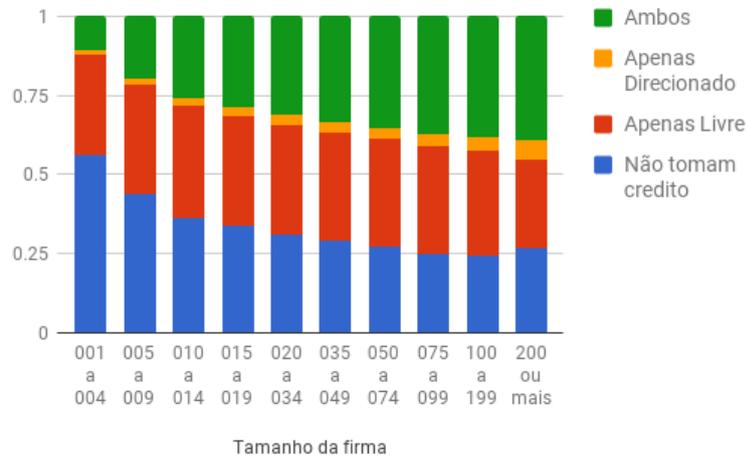
Fonte: Banco Central, elaboração própria.

A tabela 2, apresenta a distribuição das formas de financiamento das firmas:¹⁰. Nota-se que cerca de metade das firmas está fora do mercado formal de crédito bancário, provavelmente dependendo de autofinanciamento para viabilizar investimentos. Outro destaque, que pode ser observado na figura 3, é que a grande maioria (cerca de 90%) das firmas que tomam crédito direcionado também tomam crédito livre. Esses resultados sugerem que, ao tomar crédito, empresas com acesso ao direcionamento contratam na verdade um "pacote", que combina crédito direcionado e livre.

⁹ A definição utilizada para caracterizar o tamanho das firmas é a utilizada pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) para o setor de comércio e serviços.

¹⁰ Aqui supomos que as firmas que estão na RAIS e não estão no SCR são as firmas que não utilizam o mercado de crédito.

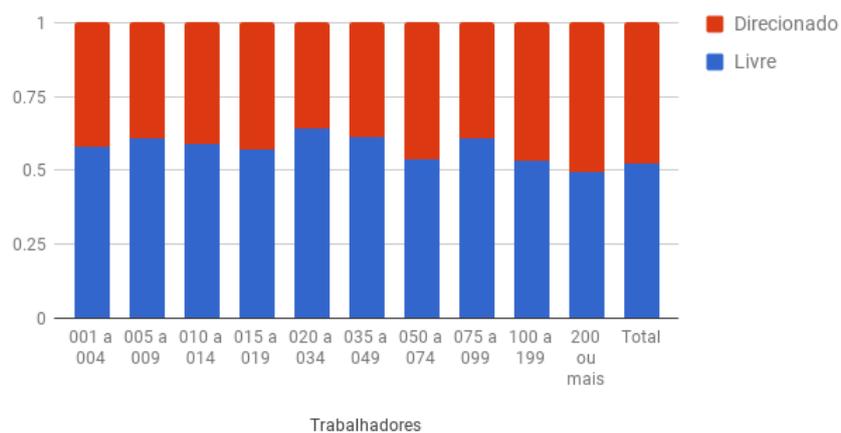
Figura 3 – Distribuição das formas de financiamento por tamanho das firmas



Fonte: Banco Central, elaboração própria.

A figura 4 mostra a composição do crédito das firmas que tomam tanto crédito direcionado quanto crédito livre por intervalos de tamanho medido em número de trabalhadores. Observa-se que, entre essas firmas, a composição entre crédito livre e crédito direcionado se mantém relativamente constante em todos os estratos de tamanho.

Figura 4 – Composição do crédito das firmas que utilizam crédito livre e direcionado



Fonte: Banco Central, elaboração própria.

Não só o acesso ao crédito livre está relacionado com o acesso ao crédito direcionado como o volume de crédito utilizado aumenta consideravelmente quando a firma utiliza o crédito direcionado. As firmas com acesso ao direcionado, que correspondem a 18,1% do total de firmas, são responsáveis pelo consumo de 81,2% do crédito da economia e de 67% do total de crédito livre.

O uso conjunto de crédito livre e direcionado pode estar relacionado ao fato de as duas modalidades, do ponto de vista da firma devedora, cumprirem papéis distintos. Como detalha Pazarbasioglu-Dutz et al. (2017), pode haver complementaridade entre crédito direcionado e livre, sendo que o primeiro é majoritariamente usado para investimento e o último para capital de giro. Além disso, nas operações de crédito direto do BNDES, existe um limite do investimento que pode ser financiado pelo banco, o que pode gerar a necessidade das firmas recorrerem ao crédito livre para realizar o projeto. Algo similar pode ocorrer nos bancos privados que fazem repasses de recursos do BNDES. É plausível inclusive supor que bancos privados facilitem o acesso a linhas subsidiadas pelo BNDES quando há contratação de outras linhas não subsidiadas. Esse uso combinado de crédito livre e direcionado cumprirá um papel importante em nossa análise

3 O Modelo

Nesta seção apresentamos um modelo que visa reproduzir as características do mercado de crédito brasileiro observadas nos dados. Trata-se de um modelo de equilíbrio geral com agentes heterogêneos num ambiente de mercados incompletos e risco idiossincrático de renda em tempo contínuo¹¹. Recentes avanços matemáticos e computacionais tornaram tal classe de modelos consideravelmente mais tratável¹². Cabe destacar o trabalho de Achdou et al. (2017), que desenvolve um conjunto de ferramentas para análise e solução numérica dessa classe de modelos com fricções no mercado de crédito.

Os agentes são heterogêneos em três dimensões: riqueza, produtividade e

¹¹ Para uma descrição mais completa dessa classe de modelos, ver Ríos-Rull (1995), Krusell e Smith (2006) e Ljungqvist e Sargent (2012).

¹² Lasry e Lions (2007) fazem um sumário dessas novas técnicas e caracterizam esse novo campo de pesquisa, chamado de *mean-field games*, que busca entender o comportamento estratégico de um grande número de agentes racionais agindo de forma estratégica em ambientes de informação limitada.

acesso ao crédito direcionado, sendo que a produtividade e o acesso ao direcionado evoluem de forma estocástica ao longo do tempo. A escolha ocupacional é endógena, seguindo a formulação de Lucas (1978). No mercado financeiro, há restrição de crédito, que será introduzida em uma formulação inspirada em Banerjee e Duflo (2010).

3.1 A Estrutura do Modelo

Seguindo Achdou et al. (2017), o tempo é contínuo. Existe um contínuo de agentes com massa um e que são heterogêneos em três dimensões: riqueza, a , produtividade, z , e acesso ao crédito direcionado, e . A distribuição conjunta destas três variáveis, $g_e(a, z)$, caracteriza o conjunto de indivíduos dessa economia.

Para cada indivíduo, a produtividade evolui de acordo com um processo de difusão de Ito:

$$d\ln z_t = -\kappa \ln z_t dt + \sigma dW_t, \quad (1)$$

de forma que z_t tem uma distribuição estacionária log-normal.

O acesso ao crédito direcionado por um indivíduo é sumarizado pela variável e . Se $e = 0$, o indivíduo não possui acesso ao crédito direcionado e se $e = 1$, ele possui. A variável e evolui de acordo com um processo de Poisson de dois estágios, de forma que e passa de 0 para 1 com intensidade ϕ_0 e de 1 para 0 com intensidade ϕ_1 . Ou seja, cada indivíduo pode transitar entre períodos de elegibilidade ou não a crédito direcionado conforme a realização de eventos de entrada e saída que ocorrem de acordo com distribuições Poisson. Os parâmetros dessas distribuições, em princípio, podem depender de condicionantes como produtividade e riqueza.

Em cada período, os indivíduos escolhem entre ser trabalhadores ou empresários. Se eles decidem ser trabalhadores, recebem wz como salário. Se eles escolhem ser empresários, devem contratar trabalho e capital em mercados competitivos e produzir o único bem de consumo da economia segundo a função de produção:

$$y = z(k^\alpha l^\beta)^\theta, \quad (2)$$

sendo k e l , respectivamente, os montantes de capital e trabalho empregados, α e β parâmetros que somam 1 e θ um parâmetro positivo e inferior a 1 de *span of control* (conforme Lucas (1978)), que impõe concavidade à função de produção, permitindo lucro econômico positivo.

Existe um banco representativo que realiza empréstimos de crédito livre e direcionado. O custo marginal de captação de recursos livres deste banco é dado pela taxa de juros da poupança, r , que é determinada no equilíbrio competitivo que será descrito mais adiante. Porém, o banco pode captar recursos para utilizar no mercado de crédito direcionado à taxa d , sendo $d < r$. A diferença entre d e r é financiada pelo governo por meio de um imposto sobre a renda. Assim, o custo dos programas de direcionamento recai tanto sobre os trabalhadores quanto sobre os empresários ¹³.

O banco representativo oferece duas linhas de crédito. Uma de crédito livre e outra de crédito direcionado. Em cada uma dessas linhas, o banco cobra da firma devedora um *markup* sobre o custo incorrido. A inclusão deste *markup* no modelo é importante para que haja um bom ajuste aos dados, dada a alta magnitude dos *spreads* bancários no Brasil ¹⁴. Este *markup* representa tanto custos de concessão de crédito (como, por exemplo, os associados a reservas bancárias, tributos ou custos judicial e regulatório) quanto poder de mercado dos bancos em um ambiente de concorrência imperfeita. Por simplicidade, optamos por não considerar potenciais efeitos do direcionamento sobre este parâmetro de *markup* e o tomamos como exógeno.

Levando-se em conta que as firmas que tomam crédito direcionado tipicamente também tomam crédito livre (em nossa amostra, apenas 1,8% das firmas financiam-se somente com crédito direcionado), tratamos o crédito a firmas com acesso a crédito direcionado como um pacote com uma participação fixa de cada modalidade: ε_d é a proporção de recursos direcionados e ε_l a proporção de recursos livres. Assim, a taxa de juros do indivíduo com acesso ao direcionado as taxas de juros de empréstimos às firmas que não recebem ou recebem direcionamento são, respectivamente, r_0 e r_1 definidos por:

$$\begin{aligned} r_0 &= (1 + \mu)r, \\ r_1 &= (1 + \mu)(\varepsilon_l r + \varepsilon_d d), \end{aligned} \tag{3}$$

¹³ Essa formulação inspira-se no fato de o BNDES ser responsável pela maior parte do crédito direcionado para as firmas e sua principal fonte de recursos ser o Tesouro Nacional.

¹⁴ Esses *spreads* dificilmente poderiam ser explicados pelo direcionamento de crédito, uma vez que a maior parte dos subsídios ao crédito direcionado é resultante de tributos e contribuições, e não subsídios cruzados dentro do sistema bancário.

sendo μ o *markup*.

O banco representativo utiliza uma fração ω de seus recursos para criar os pacotes no mercado de crédito direcionado, sendo o restante disponibilizado para os empresários sem acesso ao direcionado. A ideia aqui é conseguir reproduzir, na etapa de calibração, o fato de que os indivíduos com acesso ao crédito respondem por 80% do consumo total de crédito.

Indivíduos estão sujeitos a um limite de endividamento resultante de comprometimento limitado. Este limite é dado por uma regra inspirada em Banerjee e Duflo (2010). Empreendedores podem evitar o pagamento dos empréstimos, caso paguem um custo ηa , que pode ser interpretado como confisco de colateral. O banco, sabendo disso, só emprestará um volume de crédito compatível com a restrição de compatibilidade de incentivos:

$$z(k^\alpha l^\beta)^\theta - wl - ra - r_e(k - a) - \delta k \geq z(k^\alpha l^\beta)^\theta - wl - ra - \eta a - \delta k, \quad (4)$$

sendo δ a taxa de depreciação do capital e r_e a taxa de juros contratada por um indivíduo cujo acesso ao direcionado é definido por $e \in \{0, 1\}$.

Desta restrição, é possível derivar o máximo de capital que o empresário que utiliza o sistema financeiro poderá contratar em função da taxa de juros.

$$k \leq \lambda_e a, \text{ sendo } \lambda_e = 1 + \frac{\eta}{r_e}. \quad (5)$$

Note-se que o crédito direcionado não apenas diminui a taxa de juros para os indivíduos que o acessam, mas também flexibiliza a restrição de crédito de seus recipientes.

Nessa economia, assim como em Aiyagari (1994), toda riqueza assume a forma de capital produtivo. O empresário escolherá usar sua riqueza para se autofinanciar, caso exista a oportunidade, e recorrerá ao mercado de crédito quando suas necessidades de investimento superarem seus recursos próprios. Portanto, a demanda por capital da firma é dado por:

$$k = \text{Máx} \{k_s, k_c\}, \quad (6)$$

sendo que k_c é a solução do problema:

$$\pi_c = \underset{k_c, l_c}{\text{Máx}} z(k_c^\alpha l_c^\beta)^\theta - (r + \delta)a - (r_e + \delta)(k_c - a) - wl_c \text{ sujeito a } k_c \leq \lambda_e a, \quad (7)$$

e k_s é dado pela solução do problema:

$$\pi_s = \underset{k_s, l_s}{\text{Máx}} z(k_s^\alpha l_s^\beta)^\theta - (r + \delta)k_s - wl_s \text{ sujeito a } k_s \leq a. \quad (8)$$

O indivíduo escolhe a ocupação que lhe dá a maior renda M :

$$M = (1 - \tau)\text{Máx}\{wz, \pi\}, \quad (9)$$

sendo τ é o imposto que incide sobre a renda e é usado para financiar o subsídio ao crédito direcionado, e $\pi = \text{Máx}\{\pi_s, \pi_c\}$, o lucro derivado da atividade empresarial.

A riqueza dos indivíduos evolui de acordo com a seguinte equação:

$$da_t = (M_t + ra_t - c_t)dt. \quad (10)$$

Indivíduos são avessos a risco, com utilidade instantânea CRRA, e a cada instante decidem o quanto consumir de maneira a maximizar a utilidade intertemporal, tomando como dados os preços e as trajetórias da riqueza, da produtividade e do acesso ao crédito direcionado. Resolvem, portanto, o problema:

$$\begin{aligned} \underset{c}{\text{Máx}} \quad & \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} dt \\ \text{sujeito a: } \quad & da_t = (M_t + ra_t - c_t)dt, \\ & dz_t = \mu(z_t)dt + \sigma(z_t)dW_t, \\ & e_t \text{ segue um processo de Poisson com dois estágios.} \end{aligned} \quad (11)$$

Conforme mostram Achdou et al. (2017)¹⁵, as decisões de consumo e poupança, assim como a evolução da distribuição conjunta que caracteriza a economia podem

¹⁵ Ver apêndice para maiores detalhes.

ser sumarizadas em duas equações diferenciais parciais: a Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) e a Kolgomorov Forward (KFE), dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned} \rho V_e(a, z, t) = & \text{Máx}_c u(c) + \partial_a V_e(a, z, t)[M + r(t)a - c] + \partial_z V_e(a, z, t)\mu(z) + \\ & \frac{1}{2} \partial_{zz} V_e(a, z, t)\sigma^2(z) + \phi_e[V_{-e}(a, z, t) - V_e(a, z, t)] + \partial_t V_e(a, z, t), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \partial_t g_e(a, z, t) = & - \partial_a [s_e(a, z, t)g_e(a, z, t)] - \partial_z [\mu(z)g_e(a, z, t)] + \frac{1}{2} \partial_{zz} [\sigma^2(z)g_e(a, z, t)] \\ & - \phi_e g_e(a, z, t) + \phi_{-e} g_{-e}(a, z, t). \end{aligned} \quad (13)$$

A HJB corresponde a uma equação de Euler em tempo contínuo adaptada para considerar os processos estocásticos da produtividade e da elegibilidade ao direcionado. A KFE, por sua vez, determina a evolução das distribuições de tipos ao longo do tempo em função das decisões de poupança e consumo. Em um equilíbrio estacionário, tanto a função valor do problema do indivíduo quanto a distribuição conjunta dos indivíduos na economia não se alteram. Portanto, as versões estacionárias da HJB e da KFE são dadas por:

$$\begin{aligned} \rho V_e(a, z) = & \text{Máx}_c u(c) + \partial_a V_e(a, z)[M + ra - c] + \partial_z V_e(a, z)\mu(z) + \\ & \frac{1}{2} \partial_{zz} V_e(a, z)\sigma^2(z) + \phi_e[V_{-e}(a, z) - V_e(a, z)], \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} 0 = & - \partial_a [s_e(a, z)g_e(a, z)] - \partial_z [\mu(z)g_e(a, z)] + \frac{1}{2} \partial_{zz} [\sigma^2(z)g_e(a, z)] \\ & - \phi_e g_e(a, z) + \phi_{-e} g_{-e}(a, z). \end{aligned} \quad (15)$$

Sendo que a poupança, s , e o consumo, c , são dados por:

$$s_e = M_e(a, z) + ra - c_e(a, z); \quad c_e(a, z) = (u')^{-1}(\partial_a V_e(a, z)). \quad (16)$$

Cabe destacar que, assim como em Aiyagari (1994), existe poupança precaucional. Os indivíduos acumularão mais riqueza no estado bom da natureza, e acumularão menos ou desacumularão, conforme pior for o estado da natureza em que se encontram. Tal fato fará com que a taxa de juros de equilíbrio seja menor do que o desconto intertemporal dos agentes¹⁶.

¹⁶ Ver derivação da equação de Euler no Apêndice A.

O domínio das duas equações que caracterizam o equilíbrio de estado estacionário é dado por $(\underline{a}, \infty) \times (\underline{z}, \bar{z})$.

Como $a \geq \underline{a}$, é preciso ter $s_e(a, z) \geq 0$, o que dá origem à seguinte condição de fronteira:

$$u'(M + r\underline{a}) \geq \partial_a V_e(\underline{a}, z), \forall z, s = 0, 1. \quad (17)$$

Além disso, como o processo de difusão da produtividade está refletido entre \underline{z} e \bar{z} , V_e deve satisfazer também a condição de fronteira abaixo:¹⁷

$$\partial_z V_e(a, \underline{z}) = 0, \partial_z V_e(a, \bar{z}) = 0, \forall a, s = 0, 1. \quad (18)$$

Por último, para caracterizar o equilíbrio estacionário do modelo, os mercados de crédito direcionado, de crédito livre e de trabalho devem estar em equilíbrio, assim como o montante de subsídio ao crédito direcionado deve ser igual à arrecadação tributária. Para tanto, é preciso fazer a distinção entre riqueza no sistema financeiro a_f e a riqueza usada para o autofinanciamento a_s , sendo que $a = a_f + a_s$. Em outras palavras, sendo k^e e l^e as demandas por capital e trabalho do indivíduo cujo estado de acesso ao direcionado é e , as condições abaixo devem ser respeitadas:

Equilíbrio no mercado de crédito direcionado:

$$\int_{\underline{z}}^{\bar{z}} \int_{\underline{a}}^{\infty} \text{Máx}\{k^1 - a, 0\} g_1(a, z) da dz \mathbb{1}_{\{\pi \geq wz\}} - \omega \left[\int_{\underline{z}}^{\bar{z}} \int_{\underline{a}}^{\infty} a_f g_0(a, z) da dz + \int_{\underline{z}}^{\bar{z}} \int_{\underline{a}}^{\infty} a_f g_1(a, z) da dz \right] = 0. \quad (19)$$

O primeiro termo consiste na demanda de crédito das firmas com acesso ao crédito direcionado e o segundo termo corresponde à fração da riqueza no sistema financeiro destinada aos indivíduos que acessam o direcionado.

¹⁷ Ver seção 3.5 em Dixit (1993).

Equilíbrio no mercado de crédito livre:

$$\begin{aligned} & \int_{\underline{z}}^{\bar{z}} \int_{\underline{a}}^{\infty} \text{Máx}\{k^0 - a, 0\} g_0(a, z) dadz \mathbb{1}_{\{\pi \geq wz\}} \\ & - (1 - \omega) \left[\int_{\underline{z}}^{\bar{z}} \int_{\underline{a}}^{\infty} a_f g_0(a, z) dadz + \int_{\underline{z}}^{\bar{z}} \int_{\underline{a}}^{\infty} a_f g_1(a, z) dadz \right] = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

O primeiro termo consiste na demanda de crédito das firmas sem acesso ao crédito direcionado e o segundo termo corresponde à fração da riqueza no sistema financeiro destinada aos indivíduos que não acessam o direcionado.

Equilíbrio no mercado de trabalho:

$$\begin{aligned} & \int_{\underline{z}}^{\bar{z}} \int_{\underline{a}}^{\infty} l^0 g_0(a, z) dadz \mathbb{1}_{\{\pi \geq wz\}} + \int_{\underline{z}}^{\bar{z}} \int_{\underline{a}}^{\infty} l^1 g_1(a, z) dadz \mathbb{1}_{\{\pi \geq wz\}} \\ & - \int_{\underline{z}}^{\bar{z}} \int_{\underline{a}}^{\infty} z g_0(a, z) dadz \mathbb{1}_{\{\pi < wz\}} - \int_{\underline{z}}^{\bar{z}} \int_{\underline{a}}^{\infty} z g_1(a, z) dadz \mathbb{1}_{\{\pi < wz\}} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

O primeiro e o segundo termo são, respectivamente, a demanda por trabalho por parte das firmas sem acesso e das com acesso ao direcionado. Já os dois últimos termos são a oferta de trabalho por parte das famílias.

Financiamento do crédito direcionado:

$$\begin{aligned} & \tau \left[\int_{\underline{z}}^{\bar{z}} \int_{\underline{a}}^{\infty} M g_0(a, z) dadz + \int_{\underline{z}}^{\bar{z}} \int_{\underline{a}}^{\infty} M g_1(a, z) dadz \right] \\ & - \varepsilon_d (r - d) \left[\int_{\underline{z}}^{\bar{z}} \int_{\underline{a}}^{\infty} \text{Máx}\{k^1 - a, 0\} g_1(a, z) dadz \mathbb{1}_{\{\pi \geq wz\}} \right] = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

O primeiro termo corresponde à arrecadação do imposto sobre a renda e o segundo termo é o custo do subsídio dado ao crédito direcionado.

3.2 Solução do Modelo

Nesta seção é feita uma apresentação sintética do método de resolução do modelo apresentado. Para maiores informações, ver apêndice.

Utiliza-se o método de diferenças finitas para computar a solução da HJB. Tal método aproxima a função V_e em I pontos na dimensão a (definindo assim os valores a_i , com $i = 1, \dots, I$, sendo Δa a distância entre os pontos do *grid*) e J pontos na dimensão de z , (definindo similarmente os valores z_j , com $j = 1, \dots, J$, sendo Δz a distância entre os pontos desse *grid*). Adotamos a notação $V_{e,i,j} \equiv V_e(a_i, z_j)$.

Utilizamos então a seguinte aproximação discreta de (14):

$$\begin{aligned} & \frac{V_{e,i,j}^{n+1} - V_{e,i,j}^n}{\Delta} + \rho V_{e,i,j}^{n+1} - u(c_{e,i,j}^n) - \partial_a V_{e,i,j}^{n+1} [M_{e,i,j}^n + r a_i - c_{e,i,j}^n] - \mu_j \partial_z V_{e,i,j}^{n+1} \\ & - \frac{1}{2} \sigma_j^2 \partial_{zz} V_{e,i,j}^{n+1} - \phi_e(V_{e,i,j}^{n+1} - V_{e,i,j}^n) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Tal estratégia é dita implícita, devido ao fato de V_e^{n+1} estar implicitamente definida pela equação acima. O parâmetro Δ é o *step size* do método de diferenças finitas. A vantagem de utilizar a versão implícita do método de diferenças finitas, como mostra Candler et al. (1998), é que a solução de (23) convergirá para a solução de (14) independente do tamanho de Δ .¹⁸

Podemos aproximar as derivadas da equação acima tanto pela diferença para frente como pela diferença para trás.

As derivadas em relação a z serão aproximadas por diferenças para frente:

$$\partial_z V_{e,i,j,F} \simeq \frac{V_{e,i,j+1} - V_{e,i,j}}{\Delta a}, \quad \partial_{zz} V_{e,i,j,F} \simeq \frac{V_{e,i,j+1} - 2V_{e,i,j} + V_{e,i,j-1}}{(\Delta z)^2}. \quad (24)$$

Já as derivadas em relação a a serão aproximadas pelo *Upwind Scheme*, que consiste em usar a diferença para trás quando a poupança for negativa e a diferença para frente quando a poupança for positiva, assim:

$$\partial_a V_{e,i,j,F} \simeq \frac{V_{e,i+1,j} - V_{e,i,j}}{\Delta a}, \quad \partial_a V_{e,i,j,B} \simeq \frac{V_{e,i,j} - V_{e,i-1,j}}{\Delta a}. \quad (25)$$

¹⁸ A versão explícita do esquema numérico dada por:

$$\frac{V_{e,i,j}^{n+1} - V_{e,i,j}^n}{\Delta} + \rho V_{e,i,j}^n - u(c_{e,i,j}^n) - \partial_a V_{e,i,j}^n [M_{e,i,j}^n + r a_i - c_{e,i,j}^n] - \mu_j \partial_z V_{e,i,j}^n - \frac{1}{2} \sigma_j^2 \partial_{zz} V_{e,i,j}^n - \phi_e(V_{e,i,j}^n - V_{e,i,j}^n) = 0.$$

converge apenas para valores não muito grandes de Δ , sendo que Δ tem que satisfazer as condições de Courant-Friedrichs-Levy para que a convergência seja garantida.

Tal artifício é necessário para que as condições descritas por Barles e Souganidis (1991), que garantem a convergência da solução do método de diferenças finitas para a única solução de viscosidade de (14), sejam respeitadas. Outra vantagem deste método de aproximação é que ele se encarrega de garantir que a condição de fronteira da dimensão a não seja desrespeitada no interior do espaço de estado¹⁹.

Dessa forma, o nosso esquema numérico é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{V_{e,i,j}^{n+1} - V_{e,i,j}^n}{\Delta} + \rho V_{e,i,j}^{n+1} = & u(c_{e,i,j}^n) + \frac{V_{e,i+1,j}^{n+1} - V_{e,i,j}^{n+1}}{\Delta a} [s_{e,i,j}^n F]^+ + \frac{V_{e,i,j}^{n+1} - V_{e,i-1,j}^{n+1}}{\Delta a} [s_{e,i,j}^n B]^- \\ & + \mu_j \left[\frac{V_{e,i,j+1}^{n+1} - V_{e,i,j}^{n+1}}{\Delta z} \right] + \frac{1}{2} \sigma_j^2 \left[\frac{V_{e,i,j+1}^{n+1} - 2V_{e,i,j}^{n+1} + V_{e,i,j-1}^{n+1}}{(\Delta z)^2} \right] \\ & + \phi_e (V_{-s,i,j}^{n+1} - V_{e,i,j}^{n+1}). \end{aligned} \quad (26)$$

Tal sistema consiste em $I \times J \times 2$ equações lineares. Em notação matricial:

$$\frac{1}{\Delta} (V^{n+1} - V^n) + \rho V^{n+1} = u^n + A^n V^{n+1}. \quad (27)$$

Note que quando $(V^{n+1} - V^n) = 0$:

$$\rho V^{n+1} = u^n + A^n V^{n+1}. \quad (28)$$

Basicamente, o método de diferenças finitas aproxima a dinâmica do modelo por um processo discreto Poisson com $I \times J \times 2$ estados, sendo A^n uma matriz de transição de Poisson que descreve a evolução do processo estocástico de (a_t, z_t, e_t) , podendo ainda ser interpretada como a versão discretizada do operador diferencial da HJB.

Reorganizando os termos em (27):

$$B^n V^{n+1} = b^n, \text{ sendo } B^n = \left(\frac{1}{\Delta} + \rho \right) I - A^n, \text{ } b^n = u^n + \frac{1}{\Delta} V^n. \quad (29)$$

Sendo que B^n é altamente esparsa. Dessa forma, a HJB pode ser facilmente resolvida computacionalmente para o estado estacionário por métodos iterativos.

¹⁹ Ver capítulo 5 Achdou et al. (2017).

Para resolver a equação Kolgomorov Forward usa-se o fato de que seu operador diferencial é adjunto do operador diferencial da Hamilton-Jacobi-Bellman. Assim, a versão matricial discretizada de (15) é dada por:

$$A^T g = 0. \tag{30}$$

Onde A^T é a transposta de A^n da última iteração do processo de resolução da HJB. Tal sistema pode facilmente ser resolvido computacionalmente e tem como solução g que descreve a distribuição de estado estacionário dos indivíduos dessa economia.

Por último, é necessário encontrar um equilíbrio que satisfaça as condições de zero excesso de demanda nos mercados e a condição de financiamento do crédito direcionado. Para tanto, a taxa de juros da poupança é escolhida de forma a zerar o excesso de demanda no mercado de crédito livre. Já o excesso de demanda do mercado crédito direcionado é eliminado ajustando-se ϕ_1 . Se há excesso de demanda por crédito direcionado eleva-se ϕ_1 , o que diminui o número de indivíduos com acesso ao crédito direcionado e conseqüentemente a demanda por crédito direcionado. O mercado de trabalho é equilibrado por meio do salário w . E o nível de tributação é escolhido para que a condição de déficit zero do governo seja respeitada.

Na prática, para encontrar um equilíbrio que satisfaça as condições de zero excesso de demanda nos mercados e a condição de financiamento do crédito direcionado, é feito um palpite sobre os valores de r , w , τ e ϕ_1 . Em seguida, resolve-se a HJB e a KFE e calcula-se os excessos de demanda e o excesso de financiamento. Caso as condições sejam violadas, atualiza-se os palpites, resolvendo novamente a HJB e a KFE. Repete-se o procedimento até que o equilíbrio seja encontrado.

4 Calibração

Em uma etapa preliminar, os valores de alguns parâmetros são escolhidos de acordo com os valores costumeiramente utilizados na literatura. Com base em Gollin (2002). O valor do *share* do capital na produção (α) é 0,4, e o do *share* do trabalho na produção (β) é 0,6. Já a depreciação será fixada em 0,04, baseado em Morandi, Reis et al. (2004).

Alguns outros parâmetros podem ser observados diretamente nos dados. O parâmetro ω é escolhido para reproduzir a proporção do crédito que é consumido pelas firmas que possuem acesso ao direcionado. Os parâmetros ε_d e ε_l são escolhidos de acordo com a proporção entre crédito livre e direcionado da firma que toma crédito em ambos os mercados. Já o parâmetro d é escolhido de acordo com a TJLP e a taxa de inflação do período.²⁰

O parâmetro ϕ_0 determina a probabilidade de um indivíduo passar a ser elegível a receber direcionamento. Essa probabilidade potencialmente depende de parâmetros como riqueza e produtividade. O direcionamento de crédito no Brasil²¹ é um complexo sistema de regras e decisões, com múltiplas linhas criadas e desativadas ao longo do tempo, operado em alguns casos diretamente pelo BNDES e em outros casos por bancos privados que fazem repasses em função de projetos apresentados ao BNDES. Trata-se portanto de uma estrutura difícil de ser replicada fielmente. Lazzarini et al. (2014) encontram indícios de que influência política pode aumentar a probabilidade de obter empréstimos enquanto Bonomo, Brito e Martins (2015) encontram que firmas grandes têm maior probabilidade de serem beneficiadas. Isso poderia sugerir que indivíduos mais ricos ou mais produtivos têm maior probabilidade de receber direcionamento. No entanto, há linhas específicas para pequenos empreendedores de baixa renda (como, por exemplo, as de microcrédito) e, conforme mostra a figura 3, há participação relevante de direcionamento no crédito mesmo entre as firmas de menor tamanho. Assim, em nossa especificação padrão, seremos agnósticos sobre essas relações e suporemos que ϕ_0 independe de riqueza e produtividade. Em um exercício posterior, examinaremos casos em que este parâmetro é dependente das características individuais.

Tomando-se como dada a fração de crédito direcionado ω , o parâmetro ϕ_0 está

²⁰ Em dezembro de 2012, foi anunciado que a TJLP seria fixada em 5% e ela permaneceu com esse valor até 2015. Além disso, a inflação em 2012 foi de 5,84%.

²¹ Ver, por exemplo Pazarbasioglu-Dutz et al. (2017).

associado ao tempo médio que cada indivíduo permanece recebendo direcionamento. Um valor elevado de ϕ_0 indica muita entrada de novos recipientes, e para que a fração de crédito direcionado mantenha-se em ω , é necessário que sua permanência seja curta. Não dispomos de dados sobre o tempo de permanência de cada firma como recipiente potencial de crédito direcionado, portanto consideramos em nossos exercícios um largo intervalo de tempo médio de permanência, entre 2 e 11 anos. Em nossa especificação padrão, escolhemos ϕ_0 tal que a permanência média seja de cerca de 7 anos. Exercícios de robustez mostram que mudanças neste parâmetro têm um efeito limitado sobre os resultados obtidos.

Tabela 3 – Calibração prévia: parâmetros observados nos dados

Parâmetro	Valor atribuído
Taxa de captação do direcionado (d)	-0,0084
Fração do crédito destinado ao "pacote" de crédito (ω)	0,812
Fração do "pacote" de crédito que é direcionado (ε_d)	0,45
Fração do "pacote" de crédito que é livre (ε_l)	0,55
Intensidade com que e passa de 0 para 1 (ϕ_0)	0,0015

Fonte: Produzido pelo autor.

Por último, nesta etapa, serão escolhidos os limites e o número de pontos no *grid* computacional da riqueza e da produtividade:

Tabela 4 – Calibração prévia: parâmetros computacionais

Parâmetro	Valor atribuído
Produtividade mínima (\bar{z})	0,3
Produtividade máxima (\underline{z})	2,2
Número de pontos no <i>grid</i> de produtividade (K)	50
Riqueza máxima (\bar{a})	30000
Riqueza mínima (\underline{a})	0
Número de pontos no <i>grid</i> de riqueza (I)	10000

Fonte: Produzido pelo autor.

O número de pontos no *grid* é escolhido para que os resultados encontrados sejam estáveis quando aumentamos o número de pontos do *grid* e para a manter o problema computacionalmente tratável. Os limites da produtividade são iguais

aos utilizados por Achdou et al. (2017). Na dimensão da riqueza, o limite inferior é escolhido para reproduzir a evidência empírica de que existe uma massa de indivíduos em torno de $a = 0$ e o limite superior é escolhido para que nenhum indivíduo seja impedido de acumular riqueza.

Os demais parâmetros, sumarizados no vetor $\psi = (\gamma, \theta, \rho, \eta, \mu, \kappa, \sigma)$, serão escolhidos para minimizar a distância entre alguns momentos gerados pelo modelo e os momentos observados nos dados. Para tanto, serão utilizadas momentos das distribuições de formas de financiamento e de tamanho das firmas.

Da distribuição de formas de financiamento, serão utilizados como momentos: a fração de firmas que não utilizam crédito, que utilizam apenas crédito livre e que utilizam crédito direcionado, sendo que, nos dados, este último momento é a soma da fração de firmas que utilizam apenas crédito direcionado e de firmas que utilizam crédito livre e direcionado. Já da distribuição de tamanho das firmas serão utilizados como momentos: as frações de micro firmas, de firmas pequenas, de firmas médias e de firmas grandes.

Os valores encontrados para os parâmetros de ψ são apresentados a seguir:

Tabela 5 – Resultados da calibração

Parâmetro	Valor
Parâmetro da utilidade CRRA (γ)	2,0535
Intensidade dos retornos decrescentes (θ)	0,8685
Desconto intertemporal (ρ)	0,0923
Parâmetro da restrição de crédito (η)	0,0312
Markup do sistema financeiro (μ)	6,3715
Parâmetro do processo de difusão da produtividade (κ)	0,0407
Parâmetro do processo de difusão da produtividade (σ)	0,0918

Fonte: Produzido pelo autor.

Cabe comentar que o valor encontrado para μ , apesar de alto, se enquadra na realidade brasileira. Em 2012, ano que tomamos como base para a calibração, a taxa real de juros SELIC foi de 1,8% e a taxa de juros média em operações de

crédito para pessoas jurídicas foi de 13,85%.²²

A seguir são apresentados os valores de equilíbrio de algumas variáveis de interesse:

Tabela 6 – Valores de estado estacionário de variáveis de interesse

Variável	Valor
Restrição de crédito dos indivíduos sem direcionado (λ_0)	1,3079
Restrição de crédito dos indivíduos com direcionado (λ_1)	2,1193
Taxa de remuneração da poupança (r)	0,0137
Taxa de juros cobrada dos indivíduos sem acesso ao crédito direcionado (r_0)	0,1014
Taxa de juros cobrada dos indivíduos com acesso ao crédito direcionado (r_1)	0,0279
Salário (w)	1,0410
Imposto sobre a renda (τ)	0,0065
Intensidade com que e passa de 1 para 0 (ϕ_1)	0,0131
Fração de empresários na população	0,0685
Gini da renda	0,4254
Tempo médio de acesso ao crédito direcionado	7,8417

Fonte: Produzido pelo autor.

Vale destacar que o Índice de Gini em 2012 foi de 0,496, valor próximo ao gerado pelo modelo²³. Além disso, o percentual de empregadores e trabalhadores por conta própria com registro no CNPJ (Cadastro Nacional de Pessoas Jurídicas) na PNAD (Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios) de 2012 foi de 4,4%, valor não muito distante do gerado pelo modelo.

A próxima tabela mostra o ajuste do modelo às estatísticas utilizadas na terceira etapa da calibração:

²² Dados disponíveis no Sistema Gerenciador de Séries Temporais (SGS) do BCB.

²³ O valor do Índice de Gini utilizado foi calculado pelo IBGE com base na PNAD.

Tabela 7 – Ajuste do modelo aos dados

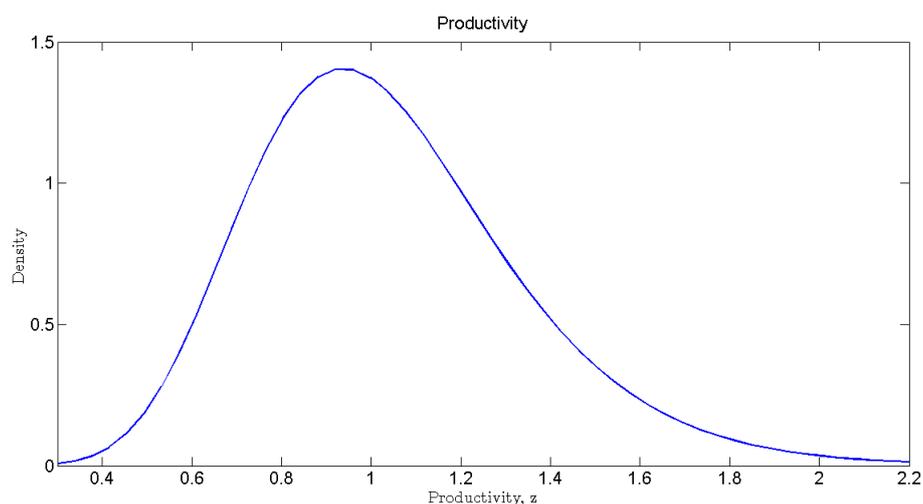
Momento	Dados	Modelo
Fração de micro firmas	0,805	0,8069
Fração de firmas pequenas	0,161	0,1505
Fração de firmas médias	0,017	0,0347
Fração de firmas grandes	0,017	0,0079
Fração de firmas que não utilizam o mercado de crédito	0,492	0,4929
Fração de firmas que utilizam apenas o crédito livre	0,327	0,3276
Fração de firmas que utilizam o crédito direcionado	0,181	0,1795

Fonte: Produzido pelo autor.

Como pode ser verificado, o modelo se ajusta bem aos dados, tendo dificuldade de reproduzir apenas a cauda pesada da distribuição de tamanho das firmas ²⁴.

A distribuição de produtividade de estado estacionário e as funções poupança, do modelo calibrado, são apresentadas a seguir:

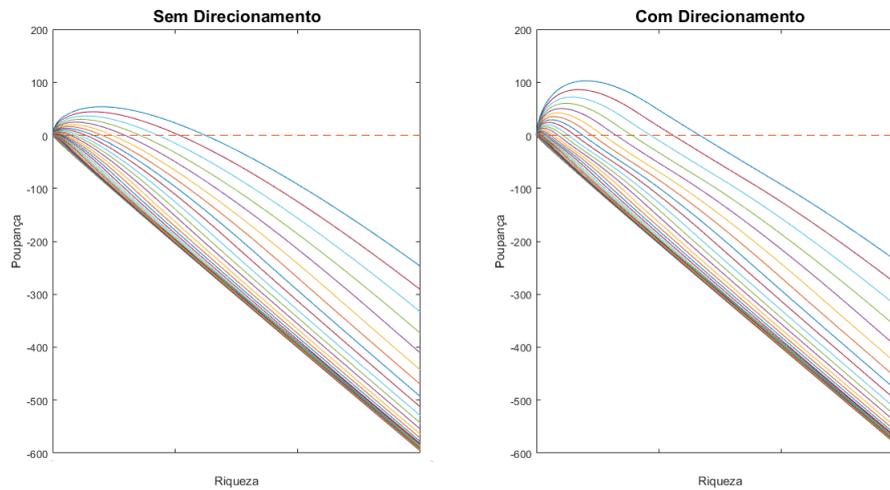
Figura 5 – Distribuição de produtividade



Fonte: Produzido pelo autor.

²⁴ Os dados apresentam uma participação particularmente alta de firmas grandes. Trata-se de uma particularidade do caso brasileiro que não pode ser explicada por esse modelo. Uma possibilidade a ser estudada é que ela esteja associada a programas de incentivos com maior foco nestas empresas.

Figura 6 – Funções poupança



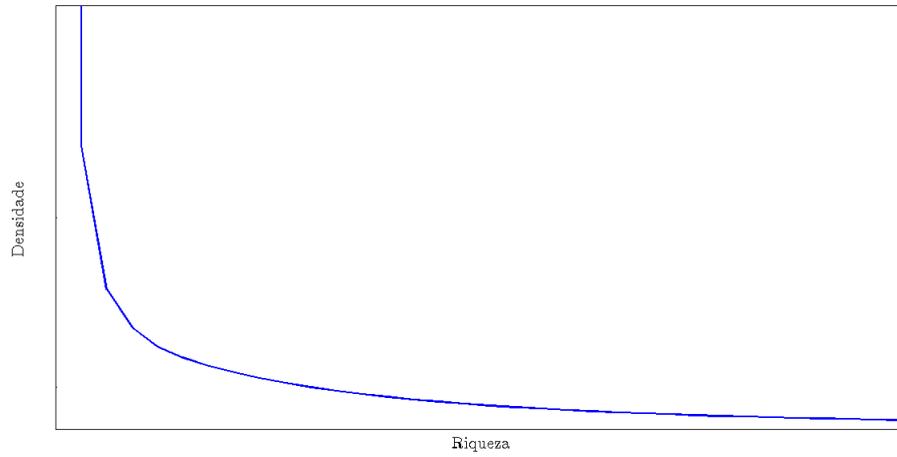
Fonte: Produzido pelo autor.

Como se pode observar, as condições de fronteira na dimensão de z são respeitadas e toda massa de indivíduos está entre os limites de impostos a z .

Quanto à função poupança, cada linha no gráfico representa um valor do *grid* de produtividade, sendo que a intersecção da função poupança com o eixo x é o nível máximo de riqueza que o indivíduo com aquela produtividade está disposto a carregar. É possível notar que indivíduos com maior produtividade, representados pelas linhas mais elevadas nos gráficos, poupam mais e estão dispostos a acumular um nível maior de riqueza. Além disto, indivíduos com acesso ao crédito direcionado possuem um maior nível ótimo de riqueza e o atingem mais rapidamente. Vale destacar que nenhum indivíduo é impedido de alcançar o nível desejado de riqueza ou é capaz de atingir níveis negativos de riqueza.

Por último, será apresentada a distribuição de riqueza:

Figura 7 – Distribuição de riqueza



Fonte: Produzido pelo autor.

Note-se que ela apresenta uma cauda de Pareto, conforme o usual na literatura.

5 Exercícios Contrafactuais

Nesta seção serão conduzidos exercícios contrafactuais utilizando o modelo anteriormente desenvolvido e calibrado. Em um primeiro momento, será analisado o que ocorre com a economia quando o crédito direcionado deixa de existir. Em seguida, serão analisadas os impactos de mudanças na forma como o crédito direcionado é distribuído.

5.1 Extinção do programa de crédito direcionado

Neste primeiro exercício, elimina-se o subsídio dado ao crédito direcionado, o que torna d igual a r . A tributação sobre a renda deixa de existir e o salário e a taxa de juros se ajustam para reequilibrar os mercados de trabalho e capital, respectivamente. Todas as demais variáveis são mantidas constantes.

Dessa forma, a taxa de juros e a restrição de crédito passam a ser iguais para todos os indivíduos. Tal exercício assemelha-se à lei que substitui a TJLP pela TLP (Taxa de Longo Prazo), com objetivo de eliminar progressivamente a diferença do custo de captação do crédito direcionado e do crédito livre.²⁵

A seguir, apresenta-se a variação que ocorre nas variáveis de interesse:

²⁵ A Lei 13.483/2017, que regulamenta a TLP, entrou em vigor no dia primeiro de janeiro de 2018.

Tabela 8 – Variação percentual após o fim do programa de direcionamento de crédito

Variável	Antes	Depois	Variação percentual
Salário recebido pelo trabalhador	1,0342	1,0574	2,24%
Taxa de rendimento da poupança	0,0137	0,0088	-38,8%
Taxa de juros cobrada dos indivíduos sem acesso ao crédito direcionado	0,1014	0,0650	-38,8%
Taxa de juros cobrada dos indivíduos com acesso ao crédito direcionado	0,0279	0,0650	132,97%
Restrição de crédito dos indivíduos sem direcionado	1,3079	1,4798	13,14%
Restrição de crédito dos indivíduos com direcionado	2,1193	1,4798	-30,18%
Produto	1,8801	1,8972	0,91%
Demanda por capital	6,1732	6,0518	-1,97%
Fração de empresários na população	0,0685	0,0725	5,84%
Fração de firmas que não utilizam o mercado crédito	0,4929	0,4188	-18,3%
Fração de micro firmas	0,8069	0,8168	1,23%
Fração de firmas pequenas	0,1505	0,1478	-1,72%
Fração de firmas médias	0,0347	0,0313	-9,8%
Fração de firmas grandes	0,0079	0,0042	-46,84%
Gini renda	0,4254	0,4188	-1,55%

Fonte: Produzido pelo autor.

Além disto, temos que a TFP aumenta em 1,63%²⁶ e o bem-estar em 2,18%. O cálculo da variação do bem-estar é feito neste, e nos demais exercícios contrafactuais, calculando-se quanto o consumo precisaria variar, antes da política analisada ser implementada, para gerar a mesma variação na utilidade média que ocorre após a mudança na política do crédito direcionado.

Note-se que a remoção do programa de crédito direcionado gera um aumento da TFP, do empreendedorismo, do salário, do produto e do bem-estar. Reduz o tamanho médio das firmas, a desigualdade e gera uma grande inclusão financeira entre as firmas.

Com o fim do crédito direcionado, deixa de haver um subsídio à contratação de crédito, o que diminui a demanda por capital. A taxa de juros da poupança cai para restabelecer o equilíbrio no mercado de crédito, o que leva ao aumento da demanda por capital por parte dos indivíduos antes sem direcionado, tanto pela menor taxa de juros como pela flexibilização da restrição de crédito. O efeito líquido

²⁶ A variação na TFP é calculada por meio do índice de Törnqvist.

é uma diminuição do capital na economia.

Com o fim do crédito direcionado, os indivíduos pouco produtivos, que só eram empresários por causa do acesso ao crédito direcionado, encerram suas atividades. Além disso, ocorre uma flexibilização da restrição de crédito dos indivíduos anteriormente sem crédito direcionado. Esses dois efeitos geram um aumento da TFP. Porém, a queda do custo de oportunidade do autofinanciamento e da taxa de juros para os indivíduos anteriormente sem direcionado permite que indivíduos menos produtivos se tornem empresários. Esse fato, em conjunto com o aumento da rigidez da restrição de crédito dos indivíduos que anteriormente possuíam crédito direcionado, diminui a TFP. No exercício apresentado, os efeitos que elevam a TFP são dominantes e mais do que compensam a queda do capital, gerando um aumento do produto.

Quanto à distribuição de renda, o fim do imposto sobre a renda e o aumento da TFP geram um aumento do salário recebido pelos trabalhadores. Já a dispersão da renda dos empresários diminui, pois agora há uma única taxa de juros que assume um valor intermediário às duas taxas que existiam anteriormente. Além disso, a queda na taxa de juros prejudica mais a renda dos que mais acumulam riqueza, no caso, os indivíduos com maior renda. Portanto, ocorre uma redução do Índice de Gini de renda.

A queda da desigualdade e o aumento do produto acabam por gerar um aumento do bem-estar, o que mostra que o fim dos programas de crédito direcionado gera um ganho de bem-estar para a população.

Por último, vale destacar ainda que a diminuição da taxa de juros para os indivíduos anteriormente sem acesso ao crédito direcionado gera uma considerável inclusão financeira entre as firmas.

5.1.1 Robustez

Como não há informações suficientes para calibrar ϕ_0 , o modelo é estimado novamente para dois valores alternativos de ϕ_0 . Tais valores, são escolhidos para gerar um intervalo razoável para o tempo médio de permanência no direcionado.

Primeiramente, estima-se o modelo com $\phi_0 = 0,001$, gerando um tempo

médio de acesso ao crédito direcionado de 11 anos. A seguir, apresenta-se os valores dos parâmetros estimados e o ajuste do modelo aos dados:

Tabela 9 – Resultado da calibração

Parâmetro	Valor
Parâmetro da utilidade CRRA (γ)	2,0316
Intensidade dos retornos decrescentes (θ)	0,8703
Desconto intertemporal (ρ)	0,0940
Parâmetro da restrição de crédito (η)	0,0316
Markup do sistema financeiro (μ)	6,3406
Parâmetro do processo de difusão da produtividade (κ)	0,0413
Parâmetro do processo de difusão da produtividade (σ)	0,0916

Fonte: Produzido pelo autor.

Tabela 10 – Ajuste do modelo aos dados

Momento	Dados	Modelo
Fração de micro firmas	0,805	0,8032
Fração de firmas pequenas	0,161	0,1527
Fração de firmas médias	0,017	0,0356
Fração de firmas grandes	0,017	0,0085
Fração de firmas que não utilizam o mercado de crédito	0,492	0,4930
Fração de firmas que utilizam apenas o crédito livre	0,327	0,3274
Fração de firmas que utilizam o crédito direcionado	0,181	0,1796

Fonte: Produzido pelo autor.

A próxima tabela apresenta o mesmo exercício contrafactual para os novos parâmetros estimados:

Tabela 11 – Variação após o fim do programa de direcionamento de crédito

Variável	Antes	Depois	Variação percentual
Salário recebido pelo trabalhador	1,0268	1,0505	2,31%
Taxa de rendimento da poupança	0,0142	0,0092	-34,75%
Taxa de juros cobrada dos indivíduos sem acesso ao crédito direcionado	0,1045	0,0675	-34,41%
Taxa de juros cobrada dos indivíduos com acesso ao crédito direcionado	0,0297	0,0675	127,27%
Restrição de crédito dos indivíduos sem direcionado	1,3023	1,4678	12,71%
Restrição de crédito dos indivíduos com direcionado	2,0628	1,4678	-28,84%
Produto	1,8651	1,8838	1%
Demanda por capital	6,0167	5,9133	-1,72%
Fração de empresários na população	0,0672	0,0715	6,4%
Fração de firmas que não utilizam o mercado crédito	0,4930	0,4194	-17,71%
Fração de micro firmas	0,8032	0,8099	1,83%
Fração de firmas pequenas	0,1505	0,1531	0,26%
Fração de firmas médias	0,0356	0,0323	-9,27%
Fração de firmas grandes	0,0085	0,0047	-44,71%
Gini renda	0,4260	0,4194	-1,55%

Fonte: Produzido pelo autor.

Além disto, temos que a TFP aumenta em 1,67% e o bem-estar em 2,26%.

Em seguida, o modelo é estimado novamente com $\phi_0 = 0.005$, gerando um tempo médio de acesso ao crédito direcionado de cerca de 2 anos. A seguir apresenta-se o valor dos parâmetros estimados e o ajuste do modelo aos dados:

Tabela 12 – Resultado da calibração

Parâmetro	Valor
Parâmetro da utilidade CRRA (γ)	2,1766
Intensidade dos retornos decrescentes (θ)	0,8786
Desconto intertemporal (ρ)	0,0864
Parâmetro da restrição de crédito (η)	0,0347
Markup do sistema financeiro (μ)	6,4578
Parâmetro do processo de difusão da produtividade (κ)	0,0565
Parâmetro do processo de difusão da produtividade (σ)	0,0977

Fonte: Produzido pelo autor.

Tabela 13 – Ajuste do modelo aos dados

Momento	Dados	Modelo
Fração de micro firmas	0,805	0,8030
Fração de firmas pequenas	0,161	0,1460
Fração de firmas médias	0,017	0,0378
Fração de firmas grandes	0,017	0,0132
Fração de firmas que não utilizam o mercado de crédito	0,492	0,4819
Fração de firmas que utilizam apenas o crédito livre	0,327	0,3382
Fração de firmas que utilizam o crédito direcionado	0,181	0,1799

Fonte: Produzido pelo autor.

A próxima tabela apresenta o mesmo exercício contrafactual realizado na seção anterior para os novos parâmetros estimados:

Tabela 14 – Variação após o fim do programa de direcionamento de crédito

Variável	Antes	Depois	Variação percentual
Salário recebido pelo trabalhador	1,0623	1,0848	2,12%
Taxa de rendimento da poupança	0,0117	0,0073	-37,61%
Taxa de juros cobrada dos indivíduos sem acesso ao crédito direcionado	0,0872	0,0545	-37,5%
Taxa de juros cobrada dos indivíduos com acesso ao crédito direcionado	0,0198	0,0545	177,78%
Restrição de crédito dos indivíduos sem direcionado	1,3982	1,6369	17,07%
Restrição de crédito dos indivíduos com direcionado	2,7575	1,6369	-40,64%
Produto	1,9273	1,9351	0,4%
Demanda por capital	6,9578	6,6922	-3,82%
Fração de empresários na população	0,0636	0,0686	7,86%
Fração de firmas que não utilizam o mercado crédito	0,4819	0,3712	-27,71%
Fração de micro firmas	0,8030	0,8104	0,92%
Fração de firmas pequenas	0,1460	0,1448	-0,82%
Fração de firmas médias	0,0378	0,0361	-4,5%
Fração de firmas grandes	0,0132	0,0087	-34,1%
Gini renda	0,4065	0,3980	-2,07%

Fonte: Produzido pelo autor.

Além disto, temos que a TFP aumenta em 1,61% e o bem-estar em 2,06%.

Como pode ser observado, os resultados qualitativos se mantêm nas duas novas estimações, mostrando que o resultado encontrado na seção anterior é estável quando variamos ϕ_0 dentro de um intervalo razoável.

5.2 Políticas alternativas

Como políticas alternativas ao fim do direcionado serão testados dois casos: uma na qual ϕ_0 depende positivamente da produtividade e outra na qual ϕ_0 depende negativamente da riqueza.

Quando ϕ_0 depende positivamente da produtividade, está se assumindo que o banco representativo possui alguma tecnologia que o capacite a identificar os indivíduos mais produtivos. Para testar essa formulação, será usada a seguinte fórmula funcional para ϕ_0 :

$$\phi_0 = 0,0015z^4. \quad (31)$$

Essa forma funcional é escolhida para gerar uma correlação alta entre o acesso ao crédito direcionado e a produtividade. Note-se que, com essa formulação, um aumento de 50% no valor da produtividade z implica um crescimento de cerca de 5 vezes no parâmetro ϕ_0 , que indica a frequência do evento "receber direcionamento" para quem não o tem.

Para realizar o exercício contrafactual com essa nova formulação, ajusta-se ϕ_1 de maneira a manter constante a fração de indivíduos com acesso ao crédito direcionado, τ se ajusta para respeitar a condição de déficit zero do governo, w e r se ajustam para equilibrar os mercados de trabalho e crédito.

A próxima tabela mostra como algumas variáveis de interesse mudam, em comparação com a calibração base, quando adotamos essa nova especificação para ϕ_0 :

Tabela 15 – Variação após o após a mudança na distribuição do acesso ao crédito direcionado

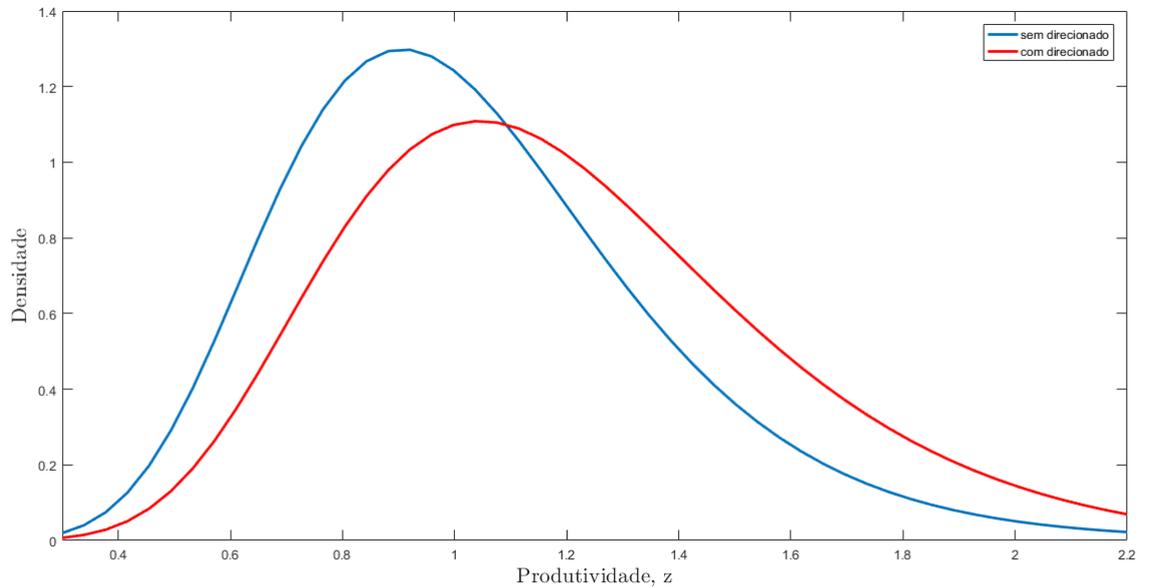
Variável	Antes	Depois	Variação percentual
Salário recebido pelo trabalhador	1,0342	1,0424	0,79%
Taxa de rendimento da poupança	0,0137	0,0152	10,94%
Taxa de juros cobrada dos indivíduos sem acesso ao crédito direcionado	0,1014	0,1122	10,65%
Taxa de juros cobrada dos indivíduos com acesso ao crédito direcionado	0,0279	0,0339	21,5%
Restrição de crédito dos indivíduos sem direcionado	1,3079	1,2781	-2,28%
Restrição de crédito dos indivíduos com direcionado	2,1193	1,9216	-9,33%
Produto	1,8801	1,9057	1,36%
Demanda por capital	6,1732	6,2808	1,74%
Fração de empresários na população	0,0685	0,0656	-4,23%
Fração de firmas que não utilizam o mercado crédito	0,4929	0,4701	-4,63%
Fração de micro firmas	0,8069	0,7959	-1,36%
Fração de firmas pequenas	0,1505	0,1567	4,12%
Fração de firmas médias	0,0347	0,0382	10,1%
Fração de firmas grandes	0,0079	0,0092	16,46%
Gini renda	0,4254	0,4268	0,33%

Fonte: Produzido pelo autor.

Além disto, temos que a TFP aumenta em 0,85% e o bem-estar em 0,79%.

Ao condicionar o acesso ao crédito direcionado à produtividade, e e z deixam de ser variáveis aleatórias independentes. Portanto, a distribuição de produtividade dos indivíduos com e sem acesso ao direcionado passam a ser distintas, conforme apresenta a Figura 8. Note-se que o fato de a produtividade média ser maior entre os indivíduos elegíveis a direcionamento, conforme as distribuições apresentadas na Figura 8, não resulta de causalidade de direcionamento para produtividade, mas sim do fato de indivíduos mais produtivos terem maior probabilidade de receberem direcionamento.

Figura 8 – Distribuição de produtividade condicional ao acesso ao direcionado



Fonte: Produzido pelo autor.

A correlação positiva entre e e z gera um maior número de indivíduos com produtividade alta e acesso ao direcionado, o que eleva a demanda por capital. Para estabelecer novamente o equilíbrio no mercado de crédito, a taxa de juros sobe, o que aumenta a restrição de crédito. Tal movimento diminui a demanda por capital, mas não a ponto de dominar o aumento inicial.

A focalização do crédito direcionado para os indivíduos mais produtivos e o aumento da taxa de juros acabam por aumentar a produtividade total dos fatores (TFP, ou total factor productivity). Na contramão desse efeito, o aumento da restrição de crédito diminui a TFP. O resultado líquido é um aumento da TFP, o que, em conjunto com uma maior demanda por capital, acaba por elevar o produto. Note-se, no entanto, que o aumento de TFP não é tão elevado quanto a mera remoção do programa.

Tal política acaba por concentrar o capital nas firmas mais produtivas e desestimula o empreendedorismo dos indivíduos menos produtivos, o que faz com que a fração de empresários na economia diminua e o tamanho médio das firmas aumente. O salário e o bem-estar aumentam, mas menos do que quando o programa

de direcionamento de crédito era extinto. Já a desigualdade de renda aumenta, pois os mais produtivos são naturalmente os que possuem maior renda. Assim, ao focalizar o crédito direcionado para estes últimos a desigualdade se intensifica.

A outra política alternativa de direcionamento que contemplamos é aumentar a probabilidade de direcionamento a indivíduos mais pobres, que são justamente os mais afetados por restrições de crédito. Nesse caso, ϕ_0 depende negativamente da riqueza. Para testar essa formulação, será usada a seguinte fórmula funcional para ϕ_0 :

$$\phi_0 = 0.0015 \frac{1}{e^a}. \quad (32)$$

O exercício contrafactual é realizado da mesma forma que no exercício anterior. A próxima tabela mostra como algumas variáveis de interesse mudam quando adotamos tal especificação para ϕ_0 :

Tabela 16 – Variação após o após a mudança na distribuição do acesso ao crédito direcionado

Variável	Antes	Depois	Variação percentual
Salário recebido pelo trabalhador	1,0342	1,0367	0,24%
Taxa de rendimento da poupança	0,0137	0,0133	-2,9%
Taxa de juros cobrada dos indivíduos sem acesso ao crédito direcionado	0,1014	0,0983	-3,06%
Taxa de juros cobrada dos indivíduos com acesso ao crédito direcionado	0,0279	0,0262	-6,01%
Restrição de crédito dos indivíduos sem direcionado	1,3079	1,3174	0,73%
Restrição de crédito dos indivíduos com direcionado	2,1193	2,1903	3,35%
Produto	1,8801	1,8822	0,11%
Demanda por capital	6,1732	6,1806	0,12%
Fração de empresários na população	0,0685	0,0689	0,58%
Fração de firmas que não utilizam o mercado crédito	0,4929	0,4989	1,22%
Fração de micro firmas	0,8069	0,8080	0,14%
Fração de firmas pequenas	0,1505	0,1507	0,13%
Fração de firmas médias	0,0347	0,0338	-2,6%
Fração de firmas grandes	0,0079	0,0075	-5,1%
Gini renda	0,4254	0,4252	-0,05%

Fonte: Produzido pelo autor.

Além disto, temos que a TFP aumenta em 0,1% e o bem-estar em 0,24%.

Da equação 14, pode-se observar que essa nova formulação para ϕ_0 , diminui os incentivos para poupar (e portanto acumular riqueza) dos indivíduos sem acesso ao crédito direcionado. Quanto às decisões de poupança dos indivíduos que acessam o crédito direcionado, o aumento de V_0 dos indivíduos mais pobres aumenta os incentivos à poupança destes, enquanto a diminuição de V_0 dos indivíduos mais ricos reduz sua poupança.

Mesmo com os desincentivos à poupança gerados, o acesso facilitado ao direcionado aos indivíduos mais pobres fornece um mecanismo que facilita a acumulação de riqueza por parte deles. Por outro lado, a demanda por crédito é afetada pelo fato de agora o subsídio estar concentrado em indivíduos mais pobres. O saldo líquido destes efeitos é um excesso de oferta no mercado de crédito que requer uma queda na taxa de juros, o que por sua vez reduz a restrição de crédito.

A queda da taxa de juros, a flexibilização da restrição de crédito e a maior massa de indivíduos pobres entre os que acessam o crédito direcionado, acabam por gerar um aumento do empreendedorismo e uma diminuição do tamanho médio das firmas.

Quanto à TFP, a queda na restrição de crédito, gerada pela menor taxa de juros e o fato de o crédito direcionado flexibilizar a restrição de crédito dos indivíduos mais restritos tendem a aumentá-la. Porém, os desestímulos à poupança, em especial dos mais produtivos tendem a diminuir a TFP. Na prática, esses efeitos praticamente se cancelam. Já o salário aumenta, refletindo o estímulo aos pobres para atividade empreendedora em relação a ofertar trabalho. Aumentam também o bem-estar e o produto, enquanto a desigualdade cai. Porém, a magnitude desses movimentos é menor do que a simples eliminação dos programas de crédito direcionado.

Ambos os exercícios apresentados revelam que correlacionar direcionamento com produtividade e pobreza pode trazer benefícios. Ainda assim os resultados apontam que a remoção do crédito direcionado é preferível do ponto de vista da sociedade: há maior aumento do salário, do produto e da TFP, além da maior diminuição da desigualdade de renda.

6 Conclusão

Este trabalho avalia o impacto dos programas de direcionamento de crédito na economia brasileira. Para tanto, foi construído um modelo de equilíbrio geral com agentes heterogêneos em tempo contínuo, que foi calibrado com os dados do SCR e da RAIS para reproduzir a distribuição das formas de financiamento e de tamanho das firmas. A seguir, foram realizados exercícios contrafactuais simulando a remoção do crédito direcionado ou variações na maneira como o crédito direcionado é distribuído. Em especial foi avaliada a focalização do crédito direcionado para indivíduos mais produtivos ou para os para indivíduos com menor riqueza.

Os resultados obtidos sobre a extinção de direcionamento de crédito corroboram a avaliação dos trabalhos prévios sobre o tema. O fim do crédito direcionado geraria ganhos de produto, diminuição da desigualdade e do tamanho médio das firmas, além de aumentar a produtividade, a inclusão financeira das firmas e o bem-estar. Tais resultados se devem ao fechamento de firmas improdutivas que só existiam devido ao acesso ao crédito direcionado, à diminuição do tamanho de firmas que atuavam em uma escala maior que a ótima e à redução das taxa de juros após o fim dos programas de direcionamento, que torna menos restritas a crédito as firmas não beneficiadas pelo crédito direcionado.

Exercícios contrafactuais apontam que, caso o crédito direcionado fosse focalizado para os indivíduos mais produtivos, haveria um aumento do salário, da produtividade, do produto e do bem-estar em relação à situação atual, mas esses ganhos seriam inferiores aos gerados pela mera eliminação dos programas de direcionamento. Além disso, ocorreria um aumento da desigualdade, já que o benefício do crédito direcionado se concentraria nos indivíduos com maior produtividade, que são naturalmente os mais ricos.

Avaliamos também os impactos de destinar uma maior parte do crédito direcionado a indivíduos com menores níveis de riqueza. Por um lado, o crédito direcionado flexibilizaria a restrição de crédito daqueles que são mais afetados por elas, o que contribuiria para gerar eficiência. Por outro lado, desestimularia a acumulação de capital dos demais indivíduos, em especial dos mais produtivos, o que reduziria a eficiência alocativa. Nossos resultados numéricos indicam ganhos positivos de produtividade, além de melhorias em salários e desigualdade. Porém, tais ganhos seriam menores do que a mera remoção das políticas de direcionamento.

Este é um trabalho pioneiro no uso do arcabouço de Achdou et al. (2017) para estudar o impacto de políticas praticadas no Brasil sobre o conjunto da economia. Este arcabouço torna computacionalmente tratáveis modelos muito ricos, tanto no volume de predições envolvendo agentes heterogêneos quanto na capacidade de se ajustar a bases de dados detalhadas. Ademais, ele é bastante flexível, permitindo incorporar regras complexas de política, como as adotadas no Brasil. Acreditamos, portanto, que o uso deste arcabouço tem forte potencial de contribuir para o aprendizado sobre a economia brasileira e os impactos de políticas adotadas ou consideradas.

Referências

- ACHDOU, Y. et al. *Income and wealth distribution in macroeconomics: A continuous-time approach*. [S.l.], 2017. 4, 12, 13, 16, 21, 25, 42
- AIYAGARI, S. R. Uninsured idiosyncratic risk and aggregate saving. *The Quarterly Journal of Economics*, MIT Press, v. 109, n. 3, p. 659–684, 1994. 15, 17
- ALFARO, L.; CHARLTON, A.; KANCZUK, F. *Plant-size distribution and cross-country income differences*. [S.l.], 2008. 5
- ANTUNES, A.; CAVALCANTI, T.; VILLAMIL, A. The effects of credit subsidies on development. *Economic Theory*, Springer, v. 58, n. 1, p. 1–30, 2015. 6
- BANERJEE, A. V. A theory of misgovernance. *The Quarterly Journal of Economics*, MIT Press, v. 112, n. 4, p. 1289–1332, 1997. 4
- BANERJEE, A. V. Contracting constraints, credit markets, and economic development abhijit v. banerjee. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. *Advances in Economics and Econometrics: Theory and Applications, Eighth World Congress*. [S.l.], 2003. v. 3, p. 1. 3
- BANERJEE, A. V.; DUFLO, E. Growth theory through the lens of development economics. *Handbook of economic growth*, Elsevier, v. 1, p. 473–552, 2005. 5
- BANERJEE, A. V.; DUFLO, E. Giving credit where it is due. *Journal of Economic Perspectives*, v. 24, n. 3, p. 61–80, 2010. 3, 4, 13, 15
- BANERJEE, A. V.; MOLL, B. Why does misallocation persist? *American Economic Journal: Macroeconomics*, v. 2, n. 1, p. 189–206, 2010. 5
- BARLES, G.; SOUGANIDIS, P. E. Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations. *Asymptotic analysis*, IOS Press, v. 4, n. 3, p. 271–283, 1991. 21
- BONOMO, M.; BRITO, R. D.; MARTINS, B. The after crisis government-driven credit expansion in brazil: A firm level analysis. *Journal of International Money and Finance*, Elsevier, v. 55, p. 111–134, 2015. 6, 23
- BUERA, F. J.; KABOSKI, J. P.; SHIN, Y. *The macroeconomics of microfinance*. [S.l.], 2012. 5
- BUERA, F. J.; MOLL, B.; SHIN, Y. Well-intended policies. *Review of Economic Dynamics*, Elsevier, v. 16, n. 1, p. 216–230, 2013. 5
- CANDLER, G. V. et al. Finite-difference methods for continuous-time dynamic programming. *QMRBC Codes*, Quantitative Macroeconomics & Real Business Cycles, 1998. 20

- DIXIT, A. K. *The art of smooth pasting*. [S.l.]: Taylor & Francis, 1993. v. 55. 18
- GOLLIN, D. Getting income shares right. *Journal of political Economy*, The University of Chicago Press, v. 110, n. 2, p. 458–474, 2002. 23
- HSIEH, C.-T.; KLENOW, P. J. Misallocation and manufacturing tfp in china and india. *The Quarterly journal of economics*, MIT Press, v. 124, n. 4, p. 1403–1448, 2009. 5
- JEONG, H.; TOWNSEND, R. M. Sources of tfp growth: occupational choice and financial deepening. *Economic Theory*, Springer, v. 32, n. 1, p. 179–221, 2007. 5
- KRUSELL, P.; SMITH, A. A. Quantitative macroeconomic models with heterogeneous agents. *Econometric Society Monographs*, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, v. 41, p. 298, 2006. 12
- LASRY, J.-M.; LIONS, P.-L. Mean field games. *Japanese journal of mathematics*, Springer, v. 2, n. 1, p. 229–260, 2007. 12
- LAZZARINI, S. G. et al. What do development banks do? Evidence from BNDES, 2002-2009. 2014. 6, 23
- LJUNGQVIST, L.; SARGENT, T. J. *Recursive macroeconomic theory*. [S.l.]: MIT press, 2012. 12
- LUCAS, R. E. On the size distribution of business firms. *The Bell Journal of Economics*, JSTOR, p. 508–523, 1978. 4, 13, 14
- MIDRIGAN, V.; XU, D. Y. Finance and misallocation: Evidence from plant-level data. *American economic review*, v. 104, n. 2, p. 422–58, 2014. 5
- MORANDI, L.; REIS, E. et al. Estoque de capital fixo no brasil, 1950-2002. *Anais do XXXII Encontro Nacional de Economia*, v. 42, 2004. 23
- PAULSON, A. L.; TOWNSEND, R. M.; KARAIVANOV, A. Distinguishing limited liability from moral hazard in a model of entrepreneurship. *Journal of political Economy*, The University of Chicago Press, v. 114, n. 1, p. 100–144, 2006. 4
- PAZARBASIOGLU-DUTZ, C. et al. Brazil financial intermediation costs and credit allocation. World Bank, Washington, DC, 2017. 7, 12, 23
- RESTUCCIA, D.; ROGERSON, R. Policy distortions and aggregate productivity with heterogeneous establishments. *Review of Economic dynamics*, Elsevier, v. 11, n. 4, p. 707–720, 2008. 5
- RÍOS-RULL, J.-V. Models with heterogeneous agents. *Frontiers of business cycle research*, Princeton University Press, p. 98–125, 1995. 12
- SOUZA-SOBRINHO, N. F. Macroeconomics of bank interest spreads: Evidence from Brazil. *Annals of Finance*, Springer, v. 6, n. 1, p. 1–32, 2010. 6
- STIGLITZ, J. E. The role of the state in financial markets. *The World Bank Economic Review*, Oxford University Press, v. 7, n. suppl_1, p. 19–52, 1993. 4

Apêndices

1 Derivações Teóricas

1.1 Derivação do Processo de Difusão da Produtividade

O logaritmo de z_t segue um processo de difusão de Ornstein–Uhlenbeck:

$$d\log z_t = \kappa(\log z_t)dt + \chi dW_t, \quad (33)$$

sendo W_t um processo de Wiener.

Tal processo de difusão gera uma distribuição estacionária normal para o $\log z_t$, com média zero e variância $\frac{\chi^2}{2\kappa}$. Para derivar a expressão para o processo de difusão de z_t basta aplicar o Lema de Ito:

$$dz_t = \mu dt + \sigma dW_t.$$

Sendo que:

$$\begin{aligned} \mu &= (-\kappa \log z_t + \frac{\chi^2}{2})z_t, \\ \sigma &= \chi^2 z_t^2. \end{aligned} \quad (34)$$

Dessa forma, z_t tem distribuição estacionária log-normal com média μ_z e variância σ_z^2 dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned} \mu_z &= e^{\frac{\chi^2}{4\kappa}}, \\ \sigma_z^2 &= (e^{\frac{\chi^2}{2\kappa}} - 1)e^{\frac{\chi^2}{2\kappa}}. \end{aligned} \quad (35)$$

1.2 Derivação da Hamilton-Jacobi-Bellman

A função valor é dada por:

$$V_e(a_t, z_t) = \text{Máx}_c \int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)} u(c_t) dt. \quad (36)$$

Considere o problema em tempo discreto com períodos de tamanho Δ

$$V_e(a_t, z_t) = \text{Máx}_c u(c_t)\Delta + e^{-\rho\Delta} \mathbb{E}\{V_e(a_{t+\Delta}, z_{t+\Delta})\}. \quad (37)$$

Tome $\Delta \rightarrow 0$ para que seja possível usar a aproximação:

$$e^{-\rho\Delta t} \approx 1 - \rho\Delta. \quad (38)$$

Dessa forma:

$$V_e(a_t, z_t) = \text{Máx}_c u(c_t)\Delta + (1 - \rho\Delta)\mathbb{E}\{V_e(a_{t+\Delta}, z_{t+\Delta})\}. \quad (39)$$

Subtraindo $(1 - \rho\Delta)V_e(a_t, z_t)$ dos dois lados:

$$\rho\Delta V_e(a_t, z_t) = \text{Máx}_c u(c_t)\Delta + (1 - \rho\Delta)\mathbb{E}\{V_e(a_{t+\Delta}, z_{t+\Delta}) - V_e(a_t, z_t)\}. \quad (40)$$

Dividindo tudo por Δ e fazendo $\Delta \rightarrow 0$:

$$\rho V_e(a_t, z_t) = \text{Máx}_c u(c_t) + \frac{\mathbb{E}\{dV_e(a_t, z_t)\}}{dt}. \quad (41)$$

Utilizando o Lema de Ito:

$$\begin{aligned} dV_e(a_t, z_t) = & (\partial_t V_e(a_t, z_t) + \partial_a V_e(a_t, z_t)[M_e(a, z, w(t), r(t)) + r(t)a - c] + \partial_z V_e(a_t, z_t)\mu(z_t) \\ & + \frac{\sigma^2(z_t)}{2}\partial_{zz}V_e(a_t, z_t) + \phi_e[V_{-e}(a_t, z_t) - V_e(a_t, z_t)])dt + \partial_z V_e(a_t, z_t)\sigma(z_t)dW_t. \end{aligned} \quad (42)$$

Usando o fato que $\mathbb{E}\{dW_t\} = 0$, :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}\{dV_e(a_t, z_t)\}}{dt} = & \partial_a V_e(a_t, z_t)[M_t + ra_t - c_t] + \partial_z V_e(a_t, z_t)\mu(z_t) + \frac{\sigma^2(z_t)}{2}\partial_{zz}V_e(a_t, z_t) \\ & + \phi_e[V_{-e}(a_t, z_t) - V_e(a_t, z_t)] + \partial_t V_e(a_t, z_t). \end{aligned} \quad (43)$$

Assim:

$$\begin{aligned} \rho V_e(a_t, z_t) = & \text{Máx}_c u(c_t) + \partial_a V_e(a_t, z_t)[M_t + ra_t - c_t] + \partial_z V_e(a_t, z_t)\mu(z_t) + \\ & \frac{\sigma^2(z_t)}{2}\partial_{zz}V_e(a_t, z_t) + \phi_e[V_{-e}(a_t, z_t) - V_e(a_t, z_t)] + \partial_t V_e(a_t, z_t). \end{aligned} \quad (44)$$

1.3 Derivação da Equação de Euler

A condição de primeira ordem de (14) é dada por:

$$u'(c) = \partial_a V_e(a, z). \quad (45)$$

Além disso, (14) pode ser escrita como:

$$\rho V_e(a, z) = \text{Máx}_c u(c_e(a, z)) + \frac{\mathbb{E}_t\{dV_e(a, z)\}}{dt}. \quad (46)$$

Aplicando o teorema do envelope:

$$\rho \partial_a V_e(a, z) = r u'(c_e(a, z)) + \frac{\mathbb{E}_t\{d\partial_a V_e(a, z)\}}{dt}. \quad (47)$$

Combinando (45) e (47) e reorganizando os termos, chega-se na equação de Euler do modelo:

$$u'(c_e(a, z)) = [1 + (r - \rho)dt]u'(c_e(a, z)) + \mathbb{E}_t\{du'(c_e(a, z))\}. \quad (48)$$

2 Método Numérico

O Método de Diferenças finitas será utilizado. Para tanto, discretiza-se a riqueza em I intervalos, a produtividade em J intervalos.

A HJB de segunda ordem é uma equação da forma:

$$F(a, z, V_e(a, z), DV_e(a, z), D^2V_e(a, z)) = 0. \quad (49)$$

No nosso caso:

$$\begin{aligned} & \rho V_e(a_t, z_t) - \text{Máx}_{c_t} u(c_t) + \partial_a V_e(a_t, z_t)[M_t + r a_t - c_t] + \partial_z V_e(a_t, z_t)\mu(z_t) \\ & + \frac{\sigma^2(z_t)}{2} \partial_{zz} V_e(a_t, z_t) + \phi_e[V_{-e}(a_t, z_t) - V_e(a_t, z_t)] = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

O correspondente esquema de diferenças finitas é dado por:

$$S(\Delta a, \Delta z, a, z, V_{e,i,j}; V_{e,i+1,j} - V_{e,i,j}, V_{e,i,j} - V_{e,i-1,j}, V_{e,i,j+1} - V_{e,i,j}, V_{e,i,j} - V_{e,i,j-1}) = 0. \quad (51)$$

No caso será usado a seguinte esquema de diferenças finitas:

$$\begin{aligned} & \rho \frac{V_{e,i,j}^{n+1} - V_{e,i,j}^n}{\Delta} + V_{e,i,j}^{n+1} - u(c_{e,i,j}) - \partial_a V_{e,i,j}^{n+1}[M_{e,i,j}^n + r a_i - c_{e,i,j}^n] \\ & - \mu_j \partial_z V_{e,i,j}^{n+1} - \frac{1}{2} \sigma_j^2 \partial_{zz} V_{e,i,j}^{n+1} - \phi_e(V_{-s,i,j}^{n+1} - V_{e,i,j}^{n+1}) = 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Onde podemos aproximar as derivadas da equação acima pela aproximações de diferenças *Backword* ou *Forward*.

2.1 Condições para convergência

Barles e Souganidis (1991) estabelecem três condições sobre as quais a solução da equação a diferenças dada por (52) converge para a solução de viscosidade da HJB:

- Monotonicidade: O esquema numérico é não crescente em: $V_{e,i+1,j}$, $V_{e,i+1,j}$, $V_{e,i,j+1}$ e $V_{e,i,j-1}$.
- Consistência: Para toda função suave V com derivadas limitadas tem-se que, conforme $\Delta a \rightarrow 0$, $\Delta z \rightarrow 0$, $a_i \rightarrow a$ e $z_j \rightarrow z$:

$$\begin{aligned} S(\Delta a, \Delta z, a, z, V_{e,i,j}; V_{e,i+1,j} - V_{e,i,j}, V_{e,i,j} - V_{e,i-1,j}, V_{e,i,j+1} - V_{e,i,j}, V_{e,i,j} - V_{e,i,j-1}) \\ \rightarrow F(a, z, V_e(a, z), DV_e(a, z), D^2V_e(a, z)). \end{aligned} \quad (53)$$

- Estabilidade: Para todo $\Delta a > 0$ e $\Delta z > 0$, $V_{e,i,j}$, tem solução única e independente de $\Delta a > 0$ e $\Delta z > 0$.

2.2 Upwind Scheme

Utilizado para satisfazer as condições para convergência. Na dimensão da riqueza, primeiro computa-se a poupança utilizando as aproximações *forward* e *backwards*:

$$\begin{aligned} s_{e,i,j,F} &= M_{e,i,j} + ra_i - (u')^{-1}(\partial_a V_{e,i,j,F}), \\ s_{e,i,j,B} &= M_{e,i,j} + ra_i - (u')^{-1}(\partial_a V_{e,i,j,B}). \end{aligned} \quad (54)$$

Em seguida usa-se a seguinte aproximação:

$$\partial_a V_{e,i,j} = \partial_a V_{e,i,j,F} \mathbb{1}_{\{s_{e,i,j,F} > 0\}} + \partial_a V_{e,i,j,B} \mathbb{1}_{\{s_{e,i,j,B} < 0\}} + \partial_a \bar{V}_{e,i,j} \mathbb{1}_{\{s_{e,i,j,F} \leq 0 < s_{e,i,j,B}\}}. \quad (55)$$

Como V é côncava em a , tem-se que $\partial_a V_{e,i,j,F} < \partial_a V_{e,i,j,B}$, o que implica em $s_{e,i,j,F} < s_{e,i,j,B}$. Dessa forma, para alguns pontos do *grid* teremos $s_{e,i,j,F} \leq 0 < s_{e,i,j,B}$. Nesses pontos estabelece-se que a poupança é zero, portanto a derivada parcial com relação a a da função valor nesses pontos é dada por $\partial_a \bar{V}_{e,i,j} = u'(M_{e,i,j} + ra_i)$.

Na dimensão de z não é necessário utilizar tal esquema, pois o processo de difusão de z_t é estritamente positivo em todos os pontos e tem condições de fronteira bem definidas. Por esse motivo utiliza-se simplesmente a aproximação *forward*.²⁷

²⁷ Seria possível usar a aproximação *backwards* sem nenhum comprometimento dos resultados.

Dessa forma, o nosso esquema numérico é dado por:

$$\begin{aligned}
\frac{V_{e,i,j}^{n+1} - V_{e,i,j}^n}{\Delta} + \rho V_{e,i,j}^{n+1} = & u(c_{e,i,j}^n) + \frac{V_{e,i+1,j}^{n+1} - V_{e,i,j}^{n+1}}{\Delta a} [s_{e,i,j}^n F]^+ + \frac{V_{e,i,j}^{n+1} - V_{e,i-1,j}^{n+1}}{\Delta a} [s_{e,i,j}^n B]^- \\
& + \mu_j \left[\frac{V_{e,i,j+1}^{n+1} - V_{e,i,j}^{n+1}}{\Delta z} \right] + \frac{1}{2} \sigma_j^2 \left[\frac{V_{e,i,j+1}^{n+1} - 2V_{e,i,j}^{n+1} + V_{e,i,j-1}^{n+1}}{\Delta z} \right] \\
& + \phi_e (V_{-s,i,j}^{n+1} - V_{e,i,j}^{n+1}).
\end{aligned} \tag{56}$$

Sendo que:

$$\begin{aligned}
[s_{e,i,j}^n F]^+ &= \text{Máx}\{M_{e,i,j}^n + ra_i - c_{e,i,j}^n, 0\}, \\
[s_{e,i,j}^n B]^- &= \text{Min}\{M_{e,i,j}^n + ra_i - c_{e,i,j}^n, 0\}.
\end{aligned} \tag{57}$$

2.3 Forma Matricial

Reorganizando os termos:

$$\begin{aligned}
\frac{V_{e,i,j}^{n+1} - V_{e,i,j}^n}{\Delta} + \rho V_{e,i,j}^{n+1} = & u(c_{e,i,j}^n) + V_{e,i-1,j}^{n+1} (x_{e,i,j}) + V_{e,i,j}^{n+1} (y_{e,i,j} + v + \phi_e) + V_{e,i+1,j}^{n+1} (z_{e,i,j}) \\
& + V_{e,i,j-1}^{n+1} (\chi_j) + V_{e,i,j+1}^{n+1} (\zeta_j) + V_{-s,i,j}^{n+1} (\phi_e).
\end{aligned} \tag{58}$$

Onde:

$$x_{e,i,j} = -\frac{[s_{e,i,j}^n B]^-}{\Delta a}, \tag{59}$$

$$y_{e,i,j} = -\frac{[s_{e,i,j}^n F]^+}{\Delta a} + \frac{[s_{e,i,j}^n B]^-}{\Delta a}, \tag{60}$$

$$z_{e,i,j} = -\frac{[s_{e,i,j}^n F]^+}{\Delta a}, \tag{61}$$

$$\chi_j = \frac{\sigma_j^2}{2(\Delta z)^2}, \tag{62}$$

$$v = -\frac{\mu_j}{\Delta z} - \frac{\sigma_j^2}{(\Delta z)^2}, \tag{63}$$

$$\zeta_j = \frac{\mu_j}{\Delta z} + \frac{\sigma_j^2}{2(\Delta z)^2}. \tag{64}$$

Tal equação acima constitui um sistema de $I \times J \times S$ equações lineares que podem ser escritas em notação matricial.

$$\frac{1}{\Delta}(V^{n+1} - V^n) + \rho V^{n+1} = u^n + A^n V^{n+1}. \quad (65)$$

Onde $A^n = C^n + D + E$, onde as matrizes $(IxJxS) \times (IxJxS)$, C^n , D , E , são construídas da seguinte maneira:

$$C_e^n = \begin{pmatrix} y_{1,1,s} & z_{1,1,s} & 0 & \dots & 0 \\ x_{1,2,s} & y_{1,2,s} & z_{1,2,s} & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & x_{1,I,s} & y_{1,I,s} & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & y_{2,1,s} & z_{2,1,s} & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & x_{2,2,s} & y_{2,2,s} & z_{2,2,s} & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & x_{2,I,s} & y_{2,I,s} & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & y_{1,J,s} & z_{1,J,s} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & x_{2,J,s} & y_{2,J,s} & z_{2,J,s} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & x_{I,J,s} & y_{I,J,s} \end{pmatrix}.$$

De forma que:

$$C^n = \begin{pmatrix} C_1^n & 0 \\ 0 & C_2^n \end{pmatrix}.$$

$$D_e = \begin{pmatrix} v_1 + \chi_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \zeta_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & v_1 + \chi_1 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \zeta_1 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & v_1 + \chi_1 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \zeta_1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \chi_2 & 0 & \ddots & 0 & v_2 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \zeta_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \chi_2 & 0 & \ddots & 0 & v_2 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \zeta_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \chi_2 & 0 & \ddots & 0 & v_2 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \chi_J & 0 & \ddots & \ddots & v_J + \zeta_J & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \chi_J & 0 & \ddots & 0 & v_J + \zeta_J & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \chi_J & 0 & \dots & 0 & v_J + \zeta_J \end{pmatrix}.$$

De forma que:

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}.$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} -\phi_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\phi_0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -\phi_0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} \phi_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \phi_0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \phi_0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \phi_1 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} -\phi_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\phi_1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -\phi_1 \end{pmatrix}.$$

De forma que:

$$E = \begin{pmatrix} E_1 & E_2 \\ E_3 & E_4 \end{pmatrix}.$$

Reorganizando os termos em (65):

$$B^n V^{n+1} = b^n, \text{ sendo } B^n = \left(\frac{1}{\Delta} + \rho\right)I - A^n, \text{ } b^n = u^n + \frac{1}{\Delta}V^n. \quad (66)$$

2.4 Algoritmo para Estado Estacionário

O algoritmo para solução consiste em chutar um valor para a função valor $V_{e,i,j}^0$. Em especial, escolhe-se o valor da utilidade de não poupar:

$$V_{e,i,j}^0 = \frac{M_{e,i,j} + r a_i^0}{\rho}. \quad (67)$$

Para $n = 0, 1, 2, \dots$, segue-se as seguintes etapas:

- Calcula-se $\partial_a V_{e,i,j}$ por meio de (55).
- Calcula-se c^n por meio de $c_{e,i,j}^n = (u')^{-1}(\partial_a v_{e,i,j}^n)$.
- Calcula-se V^{n+1} por meio de (66).
- caso V^{n+1} esteja suficientemente próximo de V^n pare, caso contrário prossiga novamente do primeiro passo.