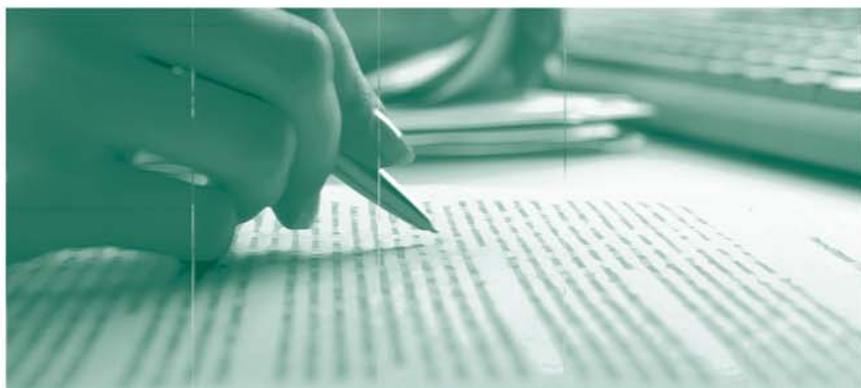


Retorno de Ações, Inflação e Atividade Econômica

Nelson da Silva e Sidney Caetano

Janeiro de 2018

Trabalhos para Discussão



471

ISSN 1519-1028
CGC 00.038.166/0001-05

Trabalhos para Discussão	Brasília	n° 471	Janeiro	2018	p. 1-48
--------------------------	----------	--------	---------	------	---------

Trabalhos para Discussão

Editado pelo Departamento de Estudos e Pesquisas (Depep) – *E-mail*: workingpaper@bcb.gov.br

Editor-chefe: Francisco Marcos Rodrigues Figueiredo – *E-mail*: francisco-marcos.figueiredo@bcb.gov.br

Coeditor: José Valentim Machado Vicente – *E-mail*: jose.valentim@bcb.gov.br

Assistente Editorial: Jane Sofia Moita – *E-mail*: jane.sofia@bcb.gov.br

Chefe do Depep: André Minella – *E-mail*: andre.minella@bcb.gov.br

Todos os Trabalhos para Discussão do Banco Central do Brasil são avaliados em processo de avaliação tipo *double blind*.

Reprodução permitida somente se a fonte for citada como: Trabalhos para Discussão nº 471.

Autorizado por Carlos Viana de Carvalho, Diretor de Política Econômica.

Controle Geral de Publicações

Banco Central do Brasil

Comun/Divip

SBS – Quadra 3 – Bloco B – Edifício-Sede – 2º subsolo

Caixa Postal 8.670

70074-900 Brasília – DF

Telefones: (61) 3414-3710 e 3414-3565

Fax: (61) 3414-1898

E-mail: identidadevisual.comun@bcb.gov.br

As opiniões expressas neste trabalho são exclusivamente do(s) autor(es) e não refletem, necessariamente, a visão do Banco Central do Brasil.

Ainda que este artigo represente trabalho preliminar, citação da fonte é requerida mesmo quando reproduzido parcialmente.

The views expressed in this work are those of the authors and do not necessarily reflect those of the Banco Central or its members.

Although these Working Papers often represent preliminary work, citation of source is required when used or reproduced.

Divisão de Atendimento ao Cidadão

Banco Central do Brasil

Deati/Diate

SBS – Quadra 3 – Bloco B – Edifício-Sede – 2º subsolo

70074-900 Brasília – DF

DDG: 0800 9792345

Fax: (61) 3414-2553

Internet: <http://www.bcb.gov.br/?FALECONOSCO>

Non-technical Summary

Empirical exercises have challenged economic theory and puzzled researchers, policymakers and market analysts by presenting a negative relationship between stock returns and inflation. These results are puzzling given the previously accepted wisdom that common stock, representing ownership of the income generated by real assets, should be a hedge against inflation. Several attempts have been made to explain this enigmatic empirical phenomenon. However, the lack of consensus still makes this relationship a relevant topic in economic science. Associated with this same literature, the relationship between stock returns and economic activity is also a relevant research topic.

Broadly speaking, empirical researches on these two related subjects indicate that the degree of correlation between variables depends on the time scale of the analysis. Given these results and focused on Brazilian data, the present work evaluates the above relations in different frequencies using the wavelet methodology. The advantage of this technique in relation to the usual methods is that it allows both to estimate the degree of association between the variables in a greater variety of frequencies and to verify the evolution of this relation over time. An additional aspect of wavelet is that it does not impose on the data any stationarity hypothesis.

Regarding the accepted assumptions, the intriguing negative relation between stock returns and inflation is present at some scales, but the results do not corroborate the main hypothesis that it would be induced by a negative relation between inflation and economic activity. Still, the relationship between real stock returns and economic activity is not independent of inflation.

In general, the results show that the series structure differs in scale. The medium and long term scales predominate, particularly, in inflation and output gap, while the short-term component is determinant in the composition of the industrial production growth rate and real return of the stock index. The study also reveals that the relationship between the variables is quite moderate over time and, when present, tends to appear when abnormal events significantly affect the economy, such as the crisis of confidence in the Brazilian economy in the early 2000s and the latest international financial crisis. Besides, based on the continuous wavelet transform, the link between output gap and inflation appears to have weakened after mid-2005 and the correlation between the Ibovespa real return and economic activity was concentrated approximately in the period between 2008 and 2012.

Sumário Não Técnico

Exercícios empíricos têm contrariado a teoria econômica e intrigado pesquisadores, formuladores de política e analistas de mercado ao mostrar uma relação negativa entre retornos das ações e inflação. Esses resultados são intrigantes dada sabedoria previamente aceita de que as ações ordinárias deveriam ser uma proteção contra a inflação. Diversas são as tentativas de explicação para este enigmático fenômeno empírico. Todavia, a falta de consenso faz da relação retorno de ações-inflação ainda um tópico importante na economia. Associado a essa mesma literatura, a relação entre o retorno das ações e a atividade econômica é igualmente um tema relevante de pesquisa.

Genericamente falando, as pesquisas empíricas sobre esses dois temas relacionados indicam que o grau de associação entre as variáveis depende da escala de tempo da análise. Dados esses resultados e com olhar voltado ao caso brasileiro, o presente trabalho avalia as relações supracitadas em diferentes frequências empregando a metodologia *wavelet*. A vantagem dessa técnica em relação aos métodos usualmente empregados é que ela permite tanto estimar o grau de associação entre as variáveis em uma variedade maior de frequências como verificar o desenrolar dessa relação ao longo do tempo. Um aspecto adicional de *wavelet* é não impor sobre os dados qualquer hipótese de estacionariedade.

No que tange às hipóteses assumidas, apesar de em algumas escalas a intrigante relação negativa entre retorno de ações e inflação se fazer presente, os resultados não corroboram a hipótese principal no sentido de que a mesma seria induzida por uma relação negativa entre a inflação e atividade econômica. Ainda, a relação entre retorno real de ações e atividade econômica não é independente da inflação.

De forma geral, os resultados mostram evidências de que a estrutura das séries não é a mesma em termos de escala. Em particular, na inflação e hiato do produto predominam as escalas de médio e longo prazos, enquanto na composição da taxa de crescimento da produção industrial e retorno real do índice acionário o componente de curto prazo é o determinante. O estudo também revela que a relação entre as variáveis é bastante moderada ao longo do tempo e, quando existente, tende a se pronunciar nos momentos em que eventos anormais afetam significativamente a economia, como a crise de confiança na economia brasileira no início dos anos 2000 e a última crise financeira internacional. Baseado na transformada *wavelet* contínua, o *link* entre o hiato do produto e a inflação parece ter se enfraquecido após meados de 2005 e a correlação do retorno real do Ibovespa com a atividade econômica mostrou-se concentrada no quadriênio 2008-2012, aproximadamente.

Retorno de Ações, Inflação e Atividade Econômica*

Nelson da Silva[†]

Sidney Caetano[‡]

Resumo

O presente trabalho desenvolve uma investigação empírica das relações entre retorno de ações, inflação e atividade econômica. A análise abrange dados mensais da economia brasileira desde 1996 até início de 2017. As propriedades das séries e suas inter-relações são investigadas através da variância e correlação *wavelet* e regressão em vários níveis de resolução. Uma medida alternativa de hiato do produto é obtida pelo método bayesiano de suavização. Os resultados mostram evidências de que na composição da inflação e do hiato do produto predominam as escalas de médio e longo prazos, enquanto no retorno de ações e variação da produção industrial os termos de curto prazo são os mais relevantes. Ainda, a relação entre as variáveis é bastante moderada ao longo do tempo e, quando existente, tende a se pronunciar nos momentos em que eventos anormais afetam significativamente a economia, como a última crise financeira internacional.

Palavras-chaves: Retorno de Ativos-Inflação; Hipótese *Proxy*; Ondaletas.

Classificação JEL: C10; E31; E44.

Este Trabalho para Discussão não deve ser citado como representando as opiniões do Banco Central do Brasil. As opiniões expressas neste trabalho são exclusivamente dos autores e não refletem, necessariamente, a visão do Banco Central do Brasil.

*Os autores agradecem os comentários de André Minella, Carlos Viana e do parecerista anônimo. Como de praxe, os eventuais erros e omissões são de nossa inteira responsabilidade.

[†]Departamento de Estudos e Pesquisas, Banco Central do Brasil. E-mail: nelson.silva@bcb.gov.br

[‡]Departamento de Economia, Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF. Bolsista de Produtividade em Pesquisa do CNPq. E-mail: sidney.caetano@ufjf.edu.br

1 Introdução

A hipótese de Fisher afirma que retornos esperados de ativos nominais devem mover-se um para um com a inflação esperada, o que implicaria que retornos reais das ações seriam determinados por fatores reais e independentes da taxa de inflação. Ao contrário da teoria econômica e do senso comum, os retornos das ações estão negativamente relacionados à inflação esperada e inesperada, pois diversas são as evidências que corroboram essa intrigante relação negativa entre as duas variáveis, especialmente durante o período pós-guerra para os EUA e outras economias (ver [Bodie \(1976\)](#), [Jaffe e Mandelker \(1976\)](#), [Nelson \(1976\)](#), [Fama e Schwert \(1977\)](#), [Lee \(2010\)](#), entre outros). Esses resultados são intrigantes dada sabedoria previamente aceita de que as ações ordinárias, que representam a propriedade dos rendimentos gerados por ativos reais, devem ser uma proteção contra a inflação. No entanto, [Geske e Roll \(1983\)](#) argumentam que este enigmático fenômeno empírico não indica causalidade, apenas sinaliza uma cadeia de eventos que resulta de choques no produto. Ainda, outras explicações para essa relação negativa podem ser encontradas na literatura, por exemplo, por meio da Hipótese *Proxy* ([FAMA, 1981](#)), Hipótese de Efeitos Fiscais ([FELDSTEIN, 1980](#)), Hipótese de Ilusão Inflacionária ([MODIGLIANI; COHN, 1979](#)), Hipótese de Dois Regimes ([LEE, 2010](#)), entre outras. Todavia, a falta de consenso faz da relação retorno de ações-inflação ainda um tópico importante na economia, gerando fatos empíricos bem estabelecidos para diferentes países.

A hipótese de [Fama \(1981\)](#) é a de que as relações negativas entre os retornos reais das ações e a inflação observadas durante o período pós-1953 são a consequência dos efeitos *proxy*. Os retornos das ações são determinados pelas previsões de variáveis reais mais relevantes, e as relações negativas de inflação e retorno das ações são induzidas por relações negativas entre inflação e atividade econômica real interpretadas no contexto da teoria da demanda por moeda e da teoria quantitativa da moeda. Ainda, os retornos das ações e as taxas de inflação estão mais fortemente relacionados (embora com sinais opostos) às medidas da atividade real futura. Neste caso, a hipótese *proxy* implica que medidas de atividade real devem dominar medidas de inflação quando ambas são usadas como variáveis explicativas em regressões de retorno real de ativos.¹

Conforme destaca [Canova e Nicoló \(2000\)](#), a relação entre retorno de ações, inflação e atividade real está no centro da agenda de pesquisa dos economistas finan-

¹ Em dados mensais, trimestrais e anuais, as taxas de crescimento da moeda e da atividade real eliminam as relações negativas entre os retornos reais das ações e as taxas de inflação esperadas. Nas regressões de retornos anuais de ações, a surpresa inflacionária também perde seu poder explicativo quando colocada em competição com a atividade real futura ([FAMA, 1981](#)).

ceiros e da macroeconomia que tenta conciliar a moderna teoria do ciclo de negócios com as regularidades empíricas do mercado financeiro. É dentro desta literatura, da enigmática relação retorno-inflação e da hipótese *proxy* dela derivada, que o presente trabalho se motiva a buscar evidências empíricas para a economia brasileira.

Dado que um resultado comum nas análises empíricas sobre a temática supracitada é que o grau de associação entre as variáveis depende da escala de tempo, a contribuição principal deste trabalho é explorar as seguintes relações em uma diversidade grande de frequências: i) a relação entre retorno de ações e inflação; ii) a relação entre retorno de ações e atividade econômica; e iii) a relação entre inflação e atividade econômica. Para isso, utiliza-se a abordagem *wavelet*. A vantagem dessa técnica em relação aos métodos usualmente empregados nessa literatura (muitas vezes análise de cointegração) é que ela permite tanto estimar o grau de correlação entre as variáveis em uma quantidade maior de frequências como verificar o desenrolar dessas relações ao longo do tempo. Outro ponto favorável ao método *wavelet* é que não há necessidade de se impor sobre os dados qualquer hipótese de estacionariedade.

A transformada *wavelet* representa um refinamento da análise de Fourier. Em particular, sua utilização permite ter em consideração quer o domínio do tempo quer o domínio da frequência de forma unificada, ou seja, é possível avaliar simultaneamente a relação entre variáveis em diferentes frequências e se essa relação tem evoluído ao longo do tempo. Então, a escolha metodológica permite a passagem para o domínio da frequência retendo informações do domínio do tempo, ainda que não completamente devido ao princípio da incerteza de Heizenberg.

Sobre o item (iii) acima, é importante ressaltar que análises do relacionamento do hiato com a inflação têm sido constantes na literatura macroeconômica, muito das vezes apoiada em alguma versão da Curva de Phillips, seja microfundamentada ou não. Isso se deve, principalmente, ao papel central que essa conexão assume na formulação e implementação da política monetária e ao frequente emprego em modelos de previsão da inflação. Muitas vezes, o hiato do produto decorre da aplicação do tradicional filtro HP e comparado a algum outro método. De forma a ser consistente com a metodologia, neste trabalho o hiato do produto também é derivado por meio da metodologia *wavelet*. Essa estimativa auxiliar representa uma contribuição adicional do artigo, juntamente com a investigação do papel do hiato sobre a dinâmica inflacionária brasileira combinando o domínio da frequência e do tempo.

Os estudos da relação entre retorno de ações, inflação e atividade econômica realizados com o método *wavelet*, que serão apresentados na Seção 2, são propensos

a analisar pares de variáveis. De acordo com os trabalhos no domínio do tempo citados, essas relações também podem ser estudadas conjuntamente. Além de avaliar as variáveis por pares, outra contribuição deste trabalho é empregar a análise conjunta dessas relações por meio das técnicas de correlação *wavelet* parcial e múltipla desenvolvidas por [Aguiar e Soares \(2011\)](#) e [Fernández-Macho \(2012\)](#), respectivamente.

Como destacado anteriormente, este trabalho utiliza a metodologia *wavelet* na análise integrada da relação entre retorno de ações, inflação e atividade econômica e a aplicação dessa metodologia faz sentido na medida em que essas relações podem variar de acordo com o horizonte de tempo ao qual essas variáveis são medidas. Assim, tanto a hipótese de Fisher na relação entre o retorno de ativos nominais e inflação, como o *link* entre retornos reais de ações e atividade econômica, que pode ser baseado no modelo fluxo de caixa descontado ou na hipótese de [Fama \(1981\)](#), e mesmo a relação entre inflação e atividade econômica, prescrita na curva de Phillips, podem depender da escala de medida dessas variáveis, com resultados distintos no curto, médio e longo prazos. A abordagem *wavelet* permite exatamente a decomposição das séries escala por escala.

A dependência do conceito de escala de tempo na relação entre a atividade econômica e retorno de ações é consequência dos horizontes temporais diferentes a que estão submetidas decisões motivadas por fins especulativos, equilíbrio da carteira, consumo não planejado ou investimentos financeiros de longo prazo. No caso da relação entre inflação e atividade econômica, o horizonte envolvido nas decisões das empresas e trabalhadores também é variado. No curto prazo, as empresas precisam decidir sobre o número de horas de trabalho, no médio, o redimensionamento da planta e, no longo prazo, a construção de novas unidades ou a produção em um local diferente, por exemplo. Aos trabalhadores, por outro lado, a negociação salarial abrange o nível atual de desemprego, a inflação passada, corrente e futura e ainda o eventual crescimento da produtividade ([GALLEGATI, 2008](#); [GALLEGATI et al., 2011](#)).

Assim, neste trabalho o método *wavelet* é empregado nas suas versões discreta e contínua de forma a investigar as relações e hipóteses supracitadas nas diferentes escalas associadas com os diferentes horizontes temporais. Por meio dessas duas transformadas *wavelet*, utiliza-se a decomposição da variância relativa a cada escala permitindo derivar as covariâncias e correlações (simples, cruzadas, parciais e múltiplas) entre as séries em horizontes de tempo predefinidos. De forma complementar, faz-se uso de regressão no domínio do tempo usando as séries decompostas da análise de multirresolução da transformada discreta, o que significa a possibilidade de estimar regressões com séries das quais se tem informação exata do período de tempo a que pertencem, ou seja, curto, médio e longo prazo. Outro procedimento

é a estimativa do hiato do produto por meio da metodologia *wavelet*, que no presente caso consiste da técnica de suavização bayesiana. Essa série permite um rápido exercício de robustez dos resultados previamente obtidos com a série do hiato do produto derivada do filtro HP.

No que tange às hipóteses assumidas, apesar de que em algumas escalas a intrigante relação negativa entre retorno de ações e inflação se fazer presente, os resultados não corroboram a hipótese *proxy* de Fama (1981) no sentido de que a mesma seria induzida pela relação negativa entre a inflação e atividade econômica. Ainda, a relação entre retorno real de ações e atividade econômica não é independente da inflação, como implica a hipótese de Fisher.

De forma geral, os resultados mostram evidências de que a estrutura das séries não é a mesma em termos de escala. Em particular, na inflação e hiato do produto predominam as escalas de médio e longo prazos, enquanto na composição da taxa de crescimento da produção industrial e retorno real do índice acionário o componente de curto prazo é o determinante. A análise *wavelet* também revela que a relação entre as variáveis é bastante moderada ao longo do tempo e, quando existente, tende a se pronunciar nos momentos em que eventos anormais afetam significativamente a economia, como a última crise financeira internacional e a crise de confiança na economia brasileira no início dos anos 2000. Baseado na transformada *wavelet* contínua, o *link* entre o hiato do produto e a inflação parece ter se enfraquecido após meados de 2005 e a correlação do retorno real do Ibovespa com a atividade econômica mostrou-se concentrada no quadriênio 2008-2012, aproximadamente.

Além desta introdução, o presente trabalho está estruturado da seguinte forma: a seção 2 apresenta uma breve revisão empírica e teórica sobre as relações exploradas; a seção 3 tenta contribuir com maiores detalhes sobre *wavelets*, que se trata de uma técnica ainda pouco empregada no Brasil; a seção 4 mostra os resultados empíricos e suas discussões; e, por fim, a seção 5 destaca as principais considerações finais.

2 Referencial Empírico e Teórico

Diversas são as evidências que corroboram a intrigante relação negativa entre inflação e retorno de ações, especialmente durante o período pós-guerra para os EUA e outras economias (Bodie (1976), Nelson (1976), Fama e Schwert (1977), etc.). Especificamente, ao buscar explicações para tal relação negativa, Fama (1981) encontrou consistência dos dados com a hipótese de que as relações negativas entre as variáveis são *proxies* para relações positivas entre retorno de ações e variáveis

reais que são determinantes fundamentais de valores patrimoniais.

As relações retorno de ações-inflação negativas são, portanto, induzidas por relações negativas entre inflação e atividade real que, por sua vez, são explicadas por uma combinação de teoria de demanda por moeda e teoria quantitativa de moeda. Aqui, a relação negativa supracitada refere-se ao fenômeno da estagflação, situação na qual ocorre simultaneamente uma queda no nível de produção e um aumento nos preços, ou seja, a combinação entre estagnação econômica e inflação. Essa relação contraria a existência de uma Curva de Phillips Novo Keynesiana, onde essa afirma que a taxa de inflação corrente é função do hiato do produto corrente e da expectativa corrente para a inflação do próximo período, tal que a inflação, em t , relaciona-se positivamente com as expectativas de inflação e a atividade econômica representada pelo hiato do produto. Em seu Prêmio Nobel George Akerlof (2002) disse que “Probably the single most important macroeconomic relationship is the Phillips curve”(MANKIW; REIS, 2010). Ele certamente tem razão em dizer que esse relacionamento tem desempenhado um importante papel em muitas teorias do ciclo de negócios ao longo do último meio século. Não menos importante, entretanto, a curva também tem sido controversa e enigmática.

No que diz respeito à aplicação da metodologia *wavelet* nessas questões, do lado da relação entre o retorno de ações com a inflação ou a atividade econômica encontram-se os trabalhos de Gallegati (2008) e Kim e In (2005). Do lado do estudo da inflação e sua relação com o hiato do produto ou desemprego, pode-se citar Tiwari et al. (2014), Pimentel (2013) - usando dados brasileiros (desemprego) -, e Gallegati et al. (2011).

Gallegati (2008) analisou a relação entre o retorno do mercado acionário e a atividade econômica americana, com dados mensais entre 1961 e 2006. O retorno do índice de ações tende a antecipar movimentos da atividade econômica, medida pelo índice de produção industrial. Contudo, essa conclusão é válida somente no caso de ciclos superiores a 16 meses. Essa evidência estatística corrobora a visão teórica de que os investidores com objetivos de longo prazo levam em conta os fundamentos macroeconômicos nas suas decisões.

Kim e In (2005) testam a hipótese de Fisher que estabelece uma relação positiva entre retornos de ações nominais e inflação. Para tanto, utilizam regressão no domínio *wavelet* e a análise de correlação *wavelet* em dados americanos. Segundo os autores, a decomposição em escala de tempo fornece uma visão considerável para se testar a hipótese de Fisher. Seus resultados mostram relação positiva no curto prazo e negativa nas demais escalas. Da análise de correlação ainda é encontrado uma relação positiva no longo prazo. A hipótese de Fisher é verificada em ativos de

risco no curto e longo prazo. Os retornos das ações não desempenham um papel de *hedge* com inflação durante o período amostral, exceto para escalas de curtíssimo e longo prazos na análise *wavelet*.

Tiwari et al. (2014) aplicam a análise *wavelets* discreta e contínua de forma a estudar a relação entre o hiato do produto e a inflação francesa. Os autores observam poder preditivo do hiato do produto em relação à dinâmica inflacionária de curto e médio prazos, tendo importantes implicações para a teoria da curva de Phillips. Ainda, a análise *wavelets* discreta mostra que as flutuações de curto e médio prazos de ambas as variáveis são estreitamente correlacionadas, enquanto que a análise contínua indica movimentos do hiato do produto à frente da inflação em horizontes de curto e médio prazos. De forma geral, concluem que o hiato do produto deve ser considerado um elemento importante na análise da curva de Phillips Novo Keynesiana, onde o hiato tem importantes implicações para a política monetária do BCE.

Gallegati et al. (2011) estão interessados em rever a relação entre inflação salarial e desemprego cuja base tem a curva de Phillips original (PHILLIPS, 1958). A motivação é olhar os dados da economia americana pós-guerra por meio da análise *wavelet* que permite decompor as variáveis em suas componentes escala-tempo para então estimar a curva de Phillips original escala por escala. Isso os levam à questão da estabilidade da relação entre as frequências e ao longo do tempo. As regressões estimadas mostraram heterogeneidade nas escalas temporais, o que seria uma indicação de não-linearidade na relação salário-desemprego. Ainda, em escalas de tempo mais longas encontram fortes significâncias estatísticas e relevantes proporções que explicam a variação total das mudanças nos salários nominais. Portanto, resultados indicando relação presente na curva de Phillips restrita aos componentes de menor frequência do dados. Além da instabilidade presente nas frequências, mostra-se uma estabilidade relevante da relação durante o período 1948-93, levando-os a concluir que os resultados *wavelet* são consistentes com os *insights* originais de Phillips.

Pimentel (2013), por sua vez, emprega a metodologia *wavelet* na investigação da dinâmica inflacionária brasileira considerando como guia a curva de Phillips na sua versão Phelps-Friedman. Especificamente, verifica a hipótese de Friedman-Phelps, segundo a qual se deve esperar uma correlação negativa entre os preços e o desemprego no curto prazo. Os dados desse estudo corresponderam ao índice de preços ao consumidor, a taxa de desemprego e a variação do salário mínimo, abrangendo o período de janeiro de 1980 a fevereiro de 2011. Os resultados, derivados da transformada *wavelets* discreta, revelam que a hipótese da curva de Phillips para a economia brasileira não se verifica no curto prazo, mas sugerem a sua validade no longo prazo. Embora os resultados apresentem novos *insights* sobre a curva de Phil-

lips no Brasil em termos de uma representação tempo-escala, torna-se importante explorar a robustez das propriedades da relação entre inflação e hiato do produto na medida em que seus resultados violam a hipótese da curva de Phillips Novo Keynesiana que implicaria verticalidade no longo prazo.

Para fins de abrangência, ainda que não estejam diretamente relacionados com a técnica empregada neste artigo, destaca-se a seguir alguns trabalhos sobre a temática proposta cuja abordagem consiste de métodos no domínio do tempo.

[Gultekin \(1983\)](#) investiga a relação entre retornos de ações e inflação em vinte e seis países para o período pós-guerra, com o objetivo de testar a hipótese generalizada de Fisher. Seus resultados, baseados em regressões de séries temporais, não corroboram a Hipótese de Fisher de que as taxas reais de retorno de ações e as taxas de inflação esperadas são independentes e que os retornos nominais das ações variam em correspondência de um para um com a inflação esperada. Ainda, os coeficientes de regressão são predominantemente negativos, a relação retorno-inflação é instável ao longo do tempo e existem diferenças entre os países. O autor destaca que países com taxas de inflação mais elevadas geralmente têm retornos de ações nominais mais altos, enquanto as taxas reais na maioria dos países têm estado em declínio desde meados da década de 1960. Sua conclusão é a de que a relação entre retornos de ações e inflação em outros países é tão enigmática quanto as observadas na economia americana.

[Alagidede e Panagiotidis \(2012\)](#) examinam a relação contemporânea entre retorno de ativos e inflação para os países do G7 por meio de regressões quantílicas após mostrarem relação negativa e significativa para EUA e relações não significativas para as demais economias. Alguns coeficientes positivos na calda superior da distribuição são encontrados para a Itália e o Reino Unido. Ainda, usando um filtro GARCH, encontram evidências de que todos os coeficientes OLS (e GARCH) são significativos e próximos da unidade, com exceção do Canadá, onde este último ainda é positivo e significativo. Estes resultados são confirmados com a regressão quantílica onde são obtidos coeficientes de unidade significativos em todos os países, exceto no Canadá.

[Canova e Nicoló \(2000\)](#) analisam as interdependências empíricas entre retornos de ações, atividade real e inflação de vários países e buscam construir um conjunto de fatos estilizados diante de importantes assimetrias internacionais na dinâmica dos dados. Os autores constatam que as inovações nos retornos nominais das ações não estão significativamente relacionadas à inflação ou à atividade real em todos os países. Ainda, a estrutura de taxas de juros dos EUA prediz tanto as taxas de inflação doméstica e externa quanto a atividade real futura doméstica e que as

inovações na inflação não afetam significativamente a atividade real.

Nunes et al. (2005) propõem analisar a relação entre variáveis macroeconômicas e retornos do Ibovespa no período pós-Plano Real. Seus resultados não corroboram a relação negativa entre inflação e atividade econômica. Ainda, variações do Ibovespa e PIB real não apresentaram relação significativa. Portanto, a hipótese *proxy* não se mantém diante de seus dados e procedimentos tradicionais empíricos. Entretanto, os resultados tendem a confirmar a suposição inerente à curva de Phillips (relação positiva entre inflação e a atividade econômica em termos reais).

Terra (2006) desenvolve uma análise de autorregressão vetorial (VAR) de forma a investigar as relações entre retornos reais das ações, taxas de juros reais, atividade real e inflação. Sua análise é aplicada aos dados da Alemanha, Canadá, França, Itália, Japão, Reino Unido e Estados Unidos. Os resultados principais não confirmam as ações como *hedge* para inflação e mostram que as diferenças entre países industrializados e países em desenvolvimento não são marcantes quanto presumido inicialmente. Ainda, os resultados, em geral, sugerem que a evidência norte-americana não pode ser generalizada mundialmente.

Segundo Lee (2010), dentre as diversas hipóteses que têm sido propostas para explicar a relação retorno de ações-inflação, a hipótese de ilusão inflacionária de Modigliani e Cohn é a que tem recebido atenção renovada. Outra hipótese que ele propõe é a hipótese de dois regimes. Ao analisar tais hipóteses usando dados dos EUA e de outras economias internacionais, o autor chega a resultados que mostram que a hipótese de ilusão inflacionária pode explicar a relação negativa retorno de ações-inflação pós-guerra, mas não é compatível com a relação positiva pré-guerra. Contudo, usando o método de identificação VAR estrutural, ele mostra a existência de dois regimes com relações positivas e negativas entre inflação e retorno de ações, não apenas em cada período dos EUA, mas também em todos os países desenvolvidos que considera. Isso parece inconsistente com a hipótese de ilusão inflacionária que prevê apenas a relação negativa.

3 Metodologia e os Dados

3.1 Transformada *Wavelet*

A análise *wavelet* é uma ferramenta estatística que, a um certo *tradeoff*, permite traduzir a informação contida numa série simultaneamente para os domínios do tempo e da frequência. A aproximação de uma função pela combinação recursiva de duas funções base, denominadas *wavelet* e de escala, é o meio de representar a série no chamado domínio tempo-escala. Os componentes de baixa e alta frequência da

série são identificados e localizados no tempo através de dilatações e compressões das funções base. Portanto, essa técnica favorece o estudo de fenômenos periódicos em que as frequências se alteram no decorrer do tempo. Um dos fatores que despertam o interesse da aplicação desse método em economia é a constatação de que diversas séries econômicas são caracterizadas por essa dinâmica.²

Há duas versões de transformada *wavelet*: contínua e discreta. As duas são utilizadas isoladamente ou de forma complementar nos trabalhos em economia. De certa forma, existe a predominância da versão discreta e a descrição a seguir começa por ela, embora historicamente a transformada contínua tenha surgido primeiro. O enfoque desta seção é mais descritivo, voltado a estabelecer um vocabulário básico do método. Os Apêndices A e B ao final do trabalho contêm um tratamento mais formal do assunto e referências, as quais serviram de base para esta seção.

A transformada *wavelet* discreta decompõe a série em grupos de coeficientes. Cada grupo é associado a uma escala e cada coeficiente dentro desse conjunto tem uma localização própria no tempo. A parte suave, associada à tendência (baixa frequência), é obtida através da projeção do sinal sobre formas modificadas de uma função de escalonamento (função escala). As modificações da função escala são decorrentes das operações de compressão e dilatação, bem como do deslocamento no tempo. Os detalhes (alta frequência), os coeficientes *wavelet*, são obtidos por projeção similar em uma função *wavelet*. Em cada escala, é possível identificar na coleção de coeficientes *wavelet* variações significativas nos dados e, em termos espectrais, associá-los a ciclos de duração específica.

Um aspecto interessante da transformada *wavelet* é a possibilidade de decompor a variância da série em partes designadas a cada escala. A interpretação pode se basear no mesmo que acontece na decomposição da densidade espectral na análise de Fourier clássica. Adicionalmente, intervalos de confiança também podem ser determinados. Uma vez que a variância tenha sido estabelecida, a covariância entre duas séries temporais pode ser derivada e decomposta por escala. Dadas a variância e a covariância *wavelet*, a combinação dessas levam ao cálculo da correlação para cada escala.

² A análise de séries temporais via o método *wavelet*, como observam Gallegati et al. (2011) em um estudo da curva de Phillips para os Estados Unidos, é relativamente recente e de aplicação usual em diferentes áreas do conhecimento científico, mas seu uso em economia ainda é um pouco restrito. Como destacam esses autores, porém, um método novo é uma oportunidade de observar fatos antigos sob uma nova ótica. Ainda segundo esses autores, dado que o procedimento de Phillips nas estimações incorreu na substituição de dados brutos por médias, o que se assemelha a um filtro *wavelet* básico, incidentalmente (a teoria *wavelet* foi desenvolvida nos anos 1980) pode-se dizer que o próprio Phillips foi um dos primeiros a utilizar a técnica *wavelet*. Gençay e Fan (2007) citam um trabalho de 1997 como um dos primeiros a reconhecer a importância dos filtros *wavelets* em econometria.

A transformada *wavelet* discreta pode ser calculada por diversos algoritmos. Um método que tem se tornado popular é denominado *Maximal Overlap Discrete Wavelet Transform* (MODWT), apresentado em Percival e Walden (2000). Uma das vantagens desse algoritmo é a possibilidade de ser usado para qualquer tamanho de amostra, ao passo que o método tradicional se restringe às amostras divisíveis por 2^J , onde J é o nível máximo de decomposição. Outro ponto a favor da MODWT é que o procedimento não é variável aos deslocamentos cíclicos da série. Ainda, ele contempla as funções usuais de decomposição e análise de variância, sendo assintoticamente mais eficiente nesse último caso.

Não é possível um único filtro *wavelet* cobrir todos os tipos de série. Há uma família de filtros disponíveis e a escolha do mais adequado é uma questão importante. Do ponto de vista prático, o filtro *Daubechies least asymmetric* (LA), com extensão igual a 8, denotado por LA(8), tem sido bastante aplicado nos trabalhos empíricos em economia. Interessante observar dois pontos: i) o comprimento do filtro implica um *tradeoff* entre aproximar o filtro a um passa baixa ideal e ter coeficientes não afetados pelas condições de borda e; ii) os filtros Daubechies são convenientes na análise de séries temporais porque produzem um alinhamento mais preciso entre os coeficientes *wavelets*, nas variadas escalas, e a série temporal original, (GALLEGATI; GALLEGATI, 2007) e (GALLEGATI, 2008).

Por sua vez, a transformada contínua detecta a correlação entre a série e uma função *wavelet* qualquer em uma determinada escala (frequência) e localização no tempo. A série é multiplicada por essa função que depende dos parâmetros de escalonamento (s) e translação (τ), que controlam a extensão e a localização da função base e assumem valores contínuos. O processo ocorre da seguinte forma: primeiro, escolhe-se uma função base e uma escala, $s = 1$, por exemplo. A função base, então, é posicionada no início do horizonte temporal ($\tau = 0$), multiplicada pela série e integrada em todos os períodos. O valor resultante é proporcional à transformada no ponto $(s, \tau) = (1, 0)$. Na mesma escala, a função base é deslocada para a direita para a localização $\tau = t$, gerando o ponto da transformada em $(s, \tau) = (1, \tau)$. O processo é repetido até que se alcance o ponto final da série. Esse procedimento determina todos valores da transformada na escala $s = 1$. Em seguida, os valores de s são acrescidos de um pequeno montante até se mapear todas possibilidades de s , encerrando o cálculo da transformada *wavelet* contínua.

A primeira etapa do cômputo da transformada é a escolha da função *wavelet* analisadora (também chamada de função *wavelet*-mãe) que servirá de protótipo para as diversas versões comprimidas e dilatadas pelo parâmetro de escala. Existem variados tipos de funções *wavelets* e a escolha depende do propósito da análise. A função *wavelet* de Morlet é uma escolha tradicional quando o objetivo recai no estudo

de mudanças de amplitude e fase, o que é essencial para analisar o sincronismo entre variáveis. Essa função tem valor complexo e a transformada pode ser dividida nas partes real e imaginária. Essa propriedade é desejável quando se busca calcular a fase da transformada de cada série, o que leva ao conhecimento dos avanços e atrasos das oscilações de uma em relação à outra nas diversas frequências e localização temporal.

Uma medida importante da transformada contínua é o espectro de potência. Ele pode ser interpretado como um indicador da distribuição da variância da série temporal no plano tempo-frequência. Outro conceito relevante é o espectro cruzado *wavelet*. Por meio dele, pode-se conhecer a covariância entre duas variáveis no espaço tempo-frequência. Um terceiro componente de interesse é a transformada coerência. Ela pode ser interpretada como um coeficiente de correlação local entre as séries, explicando quanto da variabilidade de uma pode ser explicada pela da outra em tempo-frequência.

3.2 Os dados

As séries usadas nesse trabalho foram extraídas da base de dados do IPEA-DATA e do Banco Central do Brasil e compreendem a inflação (medida pela variação percentual do IPCA), o índice Bovespa e o índice de *quantum* da produção industrial da indústria geral. Os dados são mensais, cobrindo o período de jan./1996 a jan./2017. O retorno nominal do Ibovespa é obtido pela variação percentual mensal do índice, enquanto o retorno real é a série nominal deflacionada pelo IPCA. O hiato do produto foi calculado pela diferença entre a produção industrial e a tendência obtida pelo filtro HP.³

Em razão da disponibilidade de dados mensais, o emprego da produção industrial como uma *proxy* para o PIB é uma alternativa encontrada em alguns estudos que demandam uma quantidade maior de observações e que utilizam a metodologia *wavelets*, ver Gallegati e Gallegati (2007), Mitra et al. (2011) e Tiwari et al. (2014). Destaca-se a alegação empírica de Gallegati e Gallegati (2007) para o uso da produção industrial. Segundo esses autores, embora o peso do setor de serviços nas economias industrializadas possa comprometer o papel da produção industrial como um bom indicador da atividade econômica, existem evidências de que os resul-

³ De 1996 a 2001, os dados da produção industrial correspondem à série calculada pela metodologia antiga do IBGE, tendo a mesma sido descontinuada em fev./2014. A unificação das duas séries foi feita com base na variação mensal da antiga. A tendência da produção industrial foi obtida do filtro HP da série dessazonalizada pela metodologia TRAMO-SEATS. Para esse procedimento utilizou-se uma série maior iniciada em janeiro de 1975, sendo a variação mensal o procedimento para unificar os dados provenientes de diferentes metodologias do IBGE. O hiato corresponde à diferença logarítmica entre série dessazonalizada e a tendência. Os resultados descritos adiante são qualitativamente similares quando se aplica a dessazonalização e o filtro HP nos dados da produção industrial a partir de jan./1996.

tados obtidos com a produção industrial são qualitativamente similares aos obtidos usando o PIB. Além disso, como argumenta [Mitra et al. \(2011\)](#), a produção industrial reflete, de alguma forma, o nível de utilização efetiva dos recursos produtivos, como tecnologia, matéria-prima e trabalho e, numa perspectiva global, ocorre a difusão do desempenho do setor industrial sobre a economia como um todo. Todavia, limitações sempre devem ser consideradas.

4 Resultados Empíricos

4.1 Abordagem discreta

4.1.1 Transformada MODWT e Variância

As séries da inflação, hiato do produto, taxa de crescimento da produção industrial e retorno real do Ibovespa foram decompostas com base na metodologia MODWT usando o filtro LA(8), que tem o potencial de tornar estacionária uma série integrada até a quarta ordem.⁴ Os resultados podem ser vistos nos gráficos da Figura 1, onde são apresentados os 7 conjuntos de coeficientes *wavelets* ($d_j, j = 1, \dots, 7$) e os coeficientes de escala (s7), calculados segundo as equações (5) e (6) exibidas no Apêndice A.

Os coeficientes *wavelets* de um determinado nível j podem ser vistos como diferenças entre duas médias (ponderadas) observadas na escala $\lambda_j = 2^{j-1}$. Por exemplo, os coeficientes *wavelets* d1 da Figura 1 representam mudanças entre dois meses consecutivos, d2 variações entre médias bimestrais ($\lambda_2 = 2^{2-1}$) e assim sucessivamente. A banda de frequência do filtro MODWT, em ciclos por unidade de tempo, compreende os intervalos $[2^{-(j+1)}, 2^{-j}]$, $j = 1, \dots, J$, onde J é o nível máximo de decomposição, dado pelo maior número inteiro que não é maior ou igual a $\log_2(N)$, onde N é o número de observações. No presente caso, $J = 7$. A região correspondente em unidades de tempo (período) é dada pelo inverso da região de frequência, $(2^j, 2^{j+1}]$. ([GALLEGATI; GALLEGATI, 2007](#); [POLANCO-MARTÍNEZ; ABADIE, 2016](#))

Seguindo a definição usual de ciclos de negócios, no qual a flutuação cíclica se concentra no intervalo entre 1,5 a 8 anos, pode-se classificar os coeficientes da Figura 1 da seguinte forma. Os níveis 1 a 3 (d1 a d3), abrigando os componentes de frequência alta e muito elevada, representam a dinâmica de curto prazo. Os níveis 4 a 6 abrangem o período padrão dos ciclos de negócios. A tendência, componente de

⁴ Como pode ser visto em [Percival e Walden \(2000, p. 368–369\)](#), o filtro *wavelet* Daubechies de comprimento L corresponde a uma operação implícita de diferenciação cuja ordem é $L/2$, com a propriedade de reduzir a zero uma tendência polinomial de ordem r se $\frac{L}{2} \geq r + 1$.

baixa frequência, é capturada pelos coeficientes do nível 7 (d7 e s7) (GALLEGATI; GALLEGATI, 2007).

O que os gráficos da Figura 1 mostram é que até meados de 2003 havia maior volatilidade nos ciclos de curto prazo no caso da inflação, gráfico (a). Entre jan./2006 a jun./2008, a predominância dos movimentos da inflação concentrou-se na região dos ciclos de negócios, voltando a apresentar ciclos de curto prazo a partir de 2012, aproximadamente. Consistente com as propriedades do filtro HP, no hiato do produto há um formato cíclico bem evidente nos níveis d3 a d5, compreendendo períodos na região padrão do ciclo de negócios, (b). Entre ago./12 até meados de 2015, o hiato de produto apresentou um ciclo relevante no nível d4, ou seja, período entre 1 ano e 4 meses a 2 anos e 8 meses. Como se observa no item (c), a taxa de crescimento da produção industrial concentra as maiores variações nos coeficientes *wavelets* de alta frequência. A volatilidade do retorno real do Ibovespa recai predominantemente nos níveis de alta frequência; os ciclos de 2 a 4 meses (d1) foram de magnitude maior entre 1998 e 2003, painel (d).

Avançando no estudo das propriedades de escala das variáveis e no intuito de estabelecer quanto cada escala contribuiu na formação da variância total das séries, apresenta-se a seguir a análise *wavelet* da variância, que indica a importância relativa dos ciclos de curto, médio e longos prazos. Dessa forma, a Tabela 1 mostra a proporção da variância de cada escala em relação ao total. Para obter um estimador sem viés, no cálculo da variância os coeficientes afetados pela condição de borda são excluídos, como pode ser notado na equação (7) do Apêndice A.

Com base na Tabela 1, cerca de 60% da variância da inflação pode ser atribuída aos movimentos observados nas escalas 4 e 8 (níveis d3 e d4 na tabela), o que pode ser entendido como a variância dos ciclos de período entre 8 meses e 2 anos e 8 meses. Esse padrão sugere a influência maior de choques de oferta na dinâmica inflacionária.⁵

No caso do hiato do produto, o percentual maior da variância pode ser atribuído aos movimentos observados na escala 8. A flutuação nessa escala pode ser pensada como refletindo a diferença entre duas médias ponderadas de 8 meses ou, alternativamente, a variância dos ciclos de período entre 16 a 32 meses. Da mesma forma, quando se compara médias de 1 ano e 4 meses (escala 16, nível d5), a volatilidade do hiato do produto também é relevante. Em resumo, 70% da flutuação da atividade econômica estaria sendo explicada pelos movimentos nas escalas 8 e 16.

Já a variância da taxa de crescimento da produção industrial e do retorno

⁵ Com base na inspeção visual dos coeficientes MODWT, resultado semelhante é encontrado em Pimentel (2013) para o período 1980-2011.

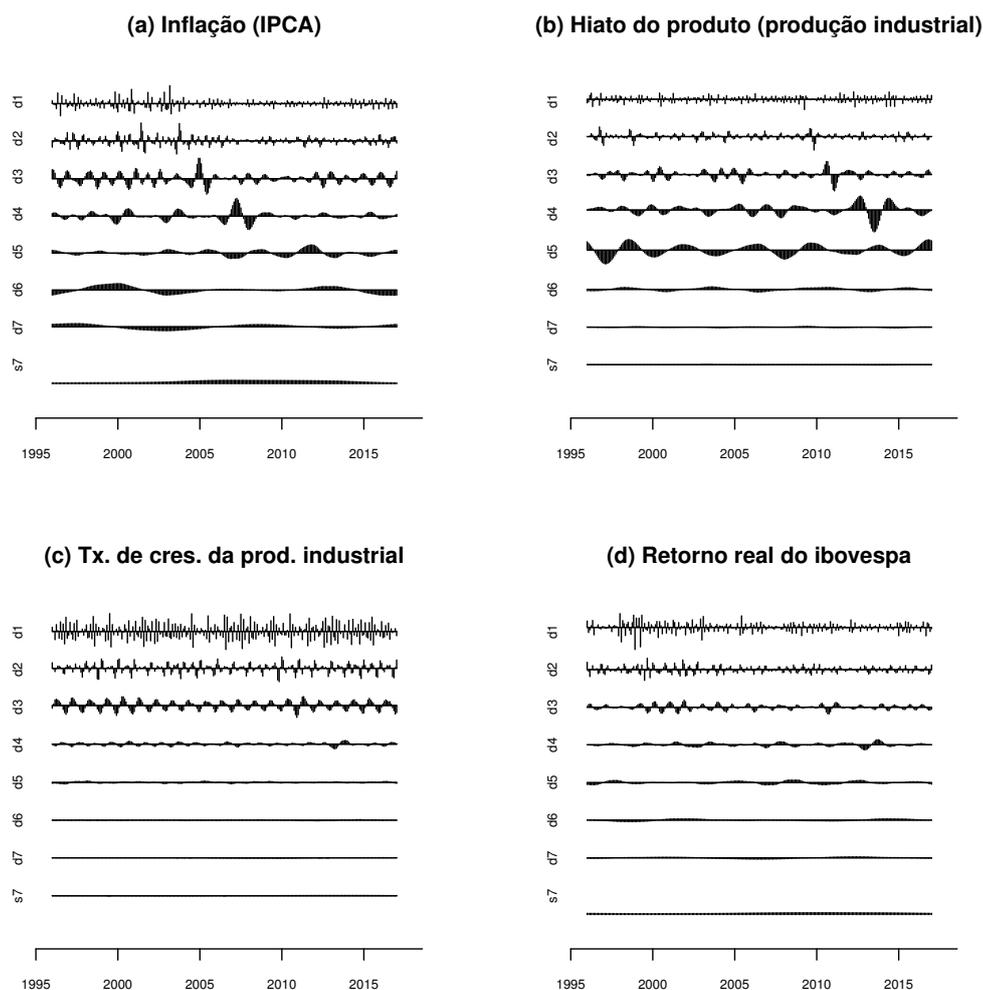


Figura 1 – Decomposição MODWT da inflação, hiato, produção industrial e retorno real do Ibovespa.

real do Ibovespa apresenta, nos dois casos, relação inversa com o tamanho da escala *wavelet*, onde a variabilidade está associada a ciclos de curto prazo. Gallegati (2008) encontrou relação semelhante para o produto industrial americano. Esse resultado é esperado dado que no curto prazo o produto é afetado tanto por choques na demanda como na oferta.

No caso do Ibovespa, a frequência mais alta desse ciclo, nível d1, explica 50% da volatilidade. Outros 23% da variância são creditados aos movimentos na escala 2, ou seja, às diferenças entre as médias de 2 meses. Entretanto, os ciclos de médio e longo prazos são irrelevantes na explicação desses movimentos. Tal resultado é consistente com Pimentel e Silva (2011), onde os autores mostraram que a volatilidade dos índices acionários decresce conforme a escala *wavelet* aumenta. Levando em conta as razões especulativas, ajuste de carteira, aumento inesperado no consumo e aplicações de longo prazo, esse padrão é desfavorável à eventual hipótese

de o mercado ser expressivamente composto por agentes movidos por objetivos de longo prazo, guiados em suas decisões pelos fundamentos econômicos.

Em resumo, o estudo preliminar das propriedades de escala das séries mostra evidências de que na composição da inflação e do hiato do produto predominam as escalas de médio e longo prazos, ao passo que os termos de curto prazo são os mais relevantes para o retorno real de ações e o crescimento da produção industrial.

Tabela 1 – Decomposição da variância para a inflação, hiato do produto, retorno real do Ibovespa e crescimento da produção industrial.

Coefficientes <i>wavelets</i> (d_j)	Escala $\lambda_j = 2^{j-1}$	Ciclos (meses)	Inflação (IPCA)	Hiato do produto	$\Delta\%$ prod. industrial	$\Delta\%$ Ibovespa
d1	1	2 a 4	17,2	3,5	59,8	50,9
d2	2	4 a 8	19,2	8,0	20,3	23,8
d3	4	8 a 16	33,8	16,9	17,8	16,3
d4	8	16 a 32	25,4	41,4	1,9	7,8
d5	16	32 a 64	4,4	30,6	0,3	1,3

4.1.2 Correlação *Wavelet*: simples e múltipla, contemporânea e cruzada

Uma possibilidade interessante da análise *wavelet* é avaliar o grau de associação entre duas séries por escalas de tempo e bandas de frequência. Os resultados estão plotados na Figura 2, ilustrando a correlação *wavelet* entre as variáveis ao longo das escalas com o respectivo limite inferior (L) e superior (U) do intervalo de confiança (95%), vide equações (8) e (9) do Apêndice A.

Da Figura 2, percebe-se que a inflação e o hiato do produto não se relacionam no curto, médio e longo prazos, diferente do resultado de Nunes et al. (2005) usando técnicas no domínio do tempo. Já o coeficiente de correlação entre a inflação e o retorno real do Ibovespa é mais elevado na escala 4, um pouco abaixo de 0,5, contudo, o limite inferior do intervalo de confiança se aproxima de zero. De qualquer forma, isso contraria a evidência empírica de correlação negativa. A correlação entre o retorno real do Ibovespa e o hiato do produto torna-se mais negativa com o aumento da escala, porém, não é estatisticamente significativa. Ao contrário, quando a variável é a taxa de crescimento do produto industrial, a correlação com o retorno real do Ibovespa tende a ser positiva e aumenta com a escala, chegando ao valor máximo próximo de 0,8. Outro ponto a notar é o aumento significativo do intervalo de confiança ao longo da escala, o que implica na imprecisão das estimativas obtidas.

Em resumo, do ponto de vista da simples relação contemporânea entre os diversos pares de variáveis, os resultados acima chamam atenção para uma análise mais robusta referente à relação inflação-hiato do produto (positiva e de curto prazo)

presente na curva de Phillips, pois torna-se relevante para a política monetária se essa relação mais fraca é uma tendência de longo prazo ou um resultado casual. Todavia, este não é o objetivo do presente trabalho. Da mesma forma, supondo uma relação pró-cíclica entre o nível de atividade e o lucro das empresas, não se confirma a relação entre esse último e o retorno real das ações qualquer que seja a escala de comparação, mensal, bimestral, semestral, etc. Certamente, a análise precisa evoluir para verificar o comportamento das variáveis nas defasagens. Antes, porém, analisa-se a relação contemporânea entre grupos de variáveis.

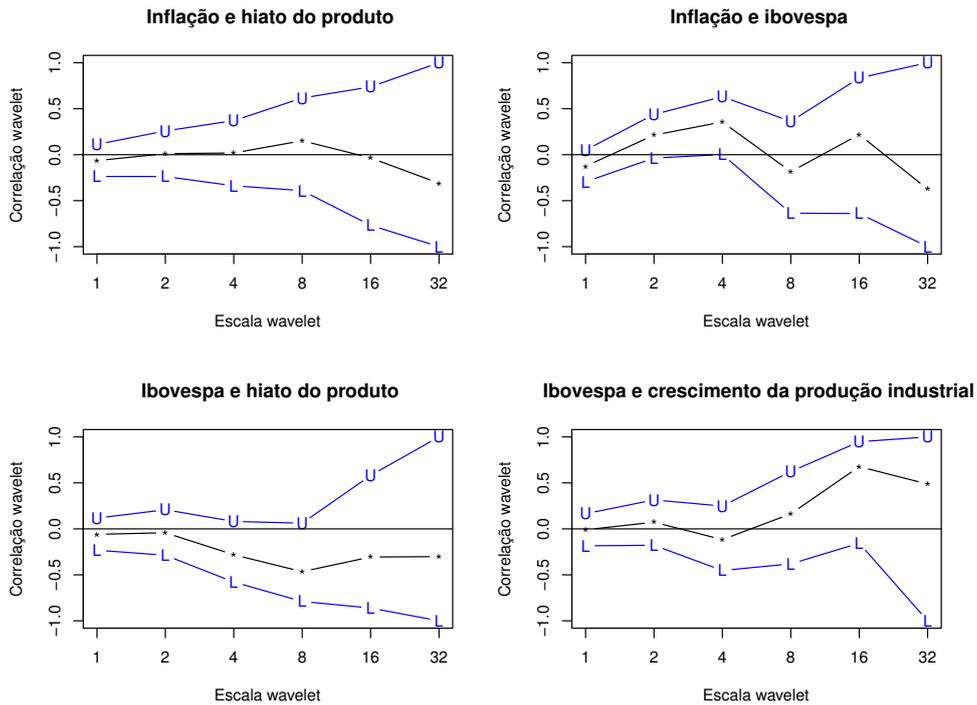


Figura 2 – Correlação *wavelet*: inflação, hiato, crescimento da produção industrial e retorno real do Ibovespa.

De forma a aprofundar a análise, calcula-se a correlação múltipla *wavelet*, proposta por Fernández-Macho (2012). Para tanto, suponha que $\tilde{d}_{j,t}^{ipca}$, $\tilde{d}_{j,t}^{yh}$ e $\tilde{d}_{j,t}^{ibov}$ sejam os coeficientes *wavelet* da inflação, hiato do produto e retorno real do Ibovespa na escala λ_j , respectivamente. Assim, a correlação múltipla *wavelet* para a inflação, por exemplo, pode ser estimada por:

$$\tilde{\varphi}_{ipca} = Corr(\tilde{d}_{j,t}^{ipca}, \widehat{\tilde{d}}_{j,t}^{ipca}), \quad (1)$$

onde $\widehat{\tilde{d}}_{j,t}^{ipca}$ é o valor ajustado do coeficiente *wavelet* da inflação numa regressão tendo como variáveis explicativas os coeficientes do hiato do produto e do retorno real do Ibovespa. A variável explicada é devidamente identificada ao longo do eixo das abscissas nos gráficos da Figura 3. Nos 3 primeiros, as variáveis envolvidas são

$\tilde{d}_{j,t}^{ipca}$, $\tilde{d}_{j,t}^{yh}$ e $\tilde{d}_{j,t}^{ibov}$ e no último, identificado como $\Delta\log(\text{pind})$ no eixo da abscissa, os coeficientes do hiato são trocados pelos da taxa de crescimento da produção industrial.

Em geral, levando em conta os intervalos de confiança, as correlações múltiplas obtidas não são estatisticamente significativas. A única exceção ocorre na regressão dos coeficientes *wavelets* do retorno do Ibovespa sobre os coeficientes da inflação e do hiato do produto. Na escala 4, o coeficiente de correlação múltipla *wavelet* é próximo de 0,5. Isso significa que nos ciclos entre 8 e 16 meses as flutuações da inflação e do hiato do produto ajudam a explicar a variabilidade do retorno real do Ibovespa. Como visto na Figura 2, isoladamente essas variáveis não apresentam correlações significativas com o Ibovespa.

Além de rejeitar a hipótese *proxy*, esses resultados iniciais mostram que a dinâmica do retorno de ações pode ser explicada, em uma determinada escala, pela combinação de inflação e atividade econômica. Nesse sentido, a implicação da hipótese de Fisher de que fatores reais explicariam os retornos reais independentemente da inflação não se sustenta de forma consistente.

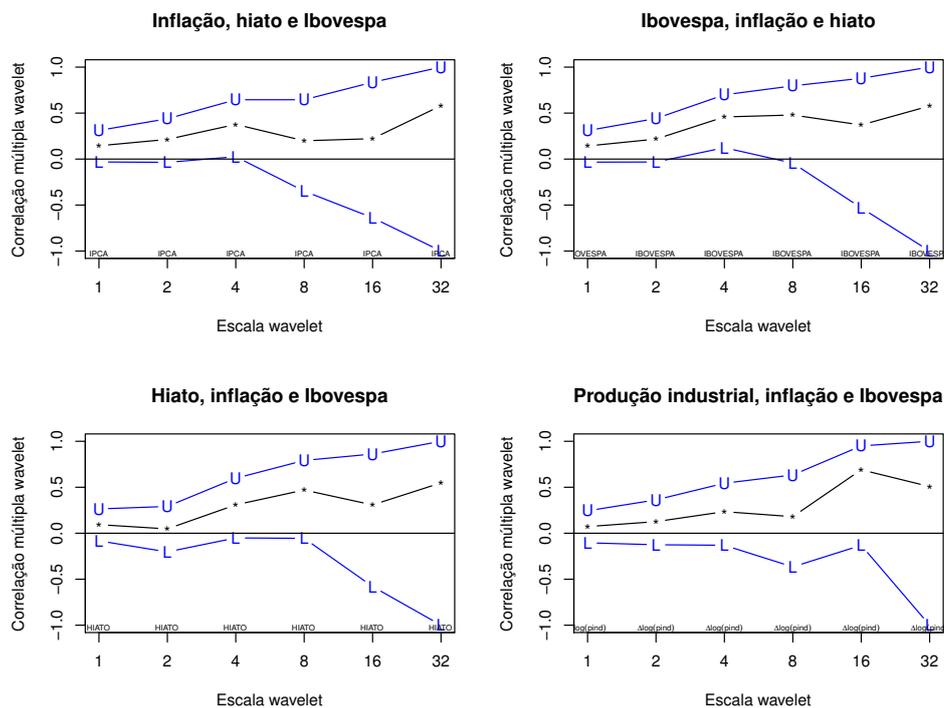


Figura 3 – Correlação múltipla *wavelet*: inflação, retorno real do Ibovespa, hiato e crescimento da produção industrial.

Voltando à possibilidade de relações defasadas, nas Figuras 4, 5, 6 e 7 observa-se, respectivamente, a correlação cruzada *wavelets* (e os correspondentes intervalos de confiança, 95%) entre a inflação no período t e o hiato do produto no período

$(t - v)$; a inflação e retorno real do Ibovespa; e deste último com o hiato do produto e a taxa de crescimento da produção industrial, respectivamente. A base de cálculo é a equação (11) do Apêndice A, sendo todos com atrasos e adiantamentos de 36 meses, desagregada em seis níveis de decomposição. O intuito é capturar as relações nos ciclos de curto, médio e longo prazos entre pares de variáveis levando em conta as defasagens.

De modo geral, em todas as escalas, a magnitude da relação entre as variáveis é próxima de zero. Na Figura 6, porém, é possível identificar correlações cruzadas estatisticamente significativas nos níveis 3, 4 e 5. A correlação na defasagem em torno de 3 meses, nível 3, pode ser interpretada como a situação em que a componente cíclica do hiato do produto entre 8 a 16 meses responde às flutuações passadas do retorno do Ibovespa nesse mesmo ciclo. No nível 4 (1,3 a 2,7 anos) não é possível identificar se uma variável atua como um indicador antecedente em relação à outra. Nesse componente cíclico, o hiato do produto responde às flutuações do retorno real do Ibovespa com 9 meses de defasagem e as variações do hiato antecedem em 3 meses o movimento do retorno do Ibovespa. No nível 5, entre 3 e 5 anos, há uma resposta defasada e positiva de 1 ano, porém, o limite do intervalo de confiança é próximo de zero. Vale destacar da Figura 7 a correlação elevada da taxa de crescimento da produção industrial com os valores passados do retorno real do Ibovespa no nível 5, ou seja, nos ciclos entre 3 a 5 anos, aproximadamente. Contudo, a exemplo da Figura 2, essa medida é bastante imprecisa e chega a zero no limite do intervalo de confiança.

Portanto, a hipótese *proxy* não pode ser corroborada, ainda que haja um fraco *link* entre retorno real e atividade econômica.

Como complemento à Figura 3, essa subseção ainda apresenta a Figura 8, que também é baseada na equação (1). Entretanto, em cada escala λ_j a variável dependente é aquela que maximiza a correlação múltipla *wavelet*, tal como definido em Fernández-Macho (2012). O nome dessa variável é devidamente identificada em cada escala da Figura 8. Nas escalas 1, 2 e 4 da Figura 8 (a), os coeficientes *wavelets* do retorno real do Ibovespa são regredidos contra os do hiato do produto e da inflação (ipca) em diversas defasagens. Na escala 8, o hiato do produto é a variável que maximiza a correlação múltipla. A correlação na escala 8 é a mais alta, havendo relações defasadas e adiantadas entre o hiato do produto e a combinação linear da inflação com o retorno real do Ibovespa. Quando o hiato é substituído pela taxa de crescimento da produção industrial, Figura 8 (b), há uma mudança geral nas variáveis maximizadoras da correlação em todas as escalas: a inflação (ipca) nas escalas 1, 2 e 4 e o Ibovespa na 8.

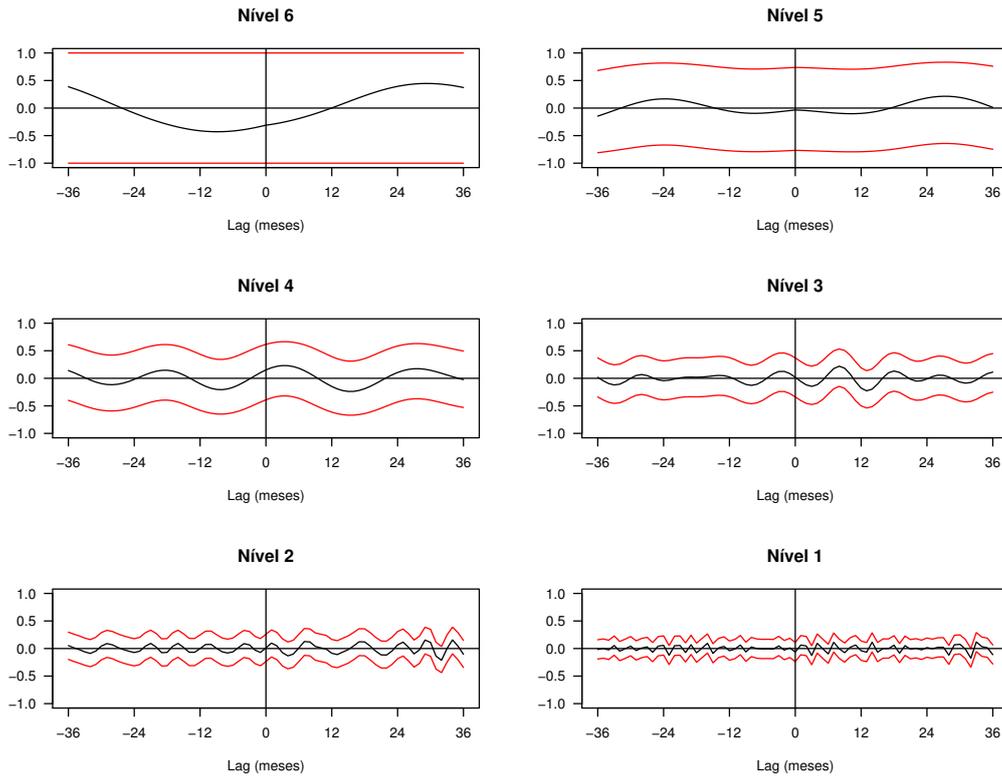


Figura 4 – Correlação cruzada *wavelet* entre inflação e hiato do produto.

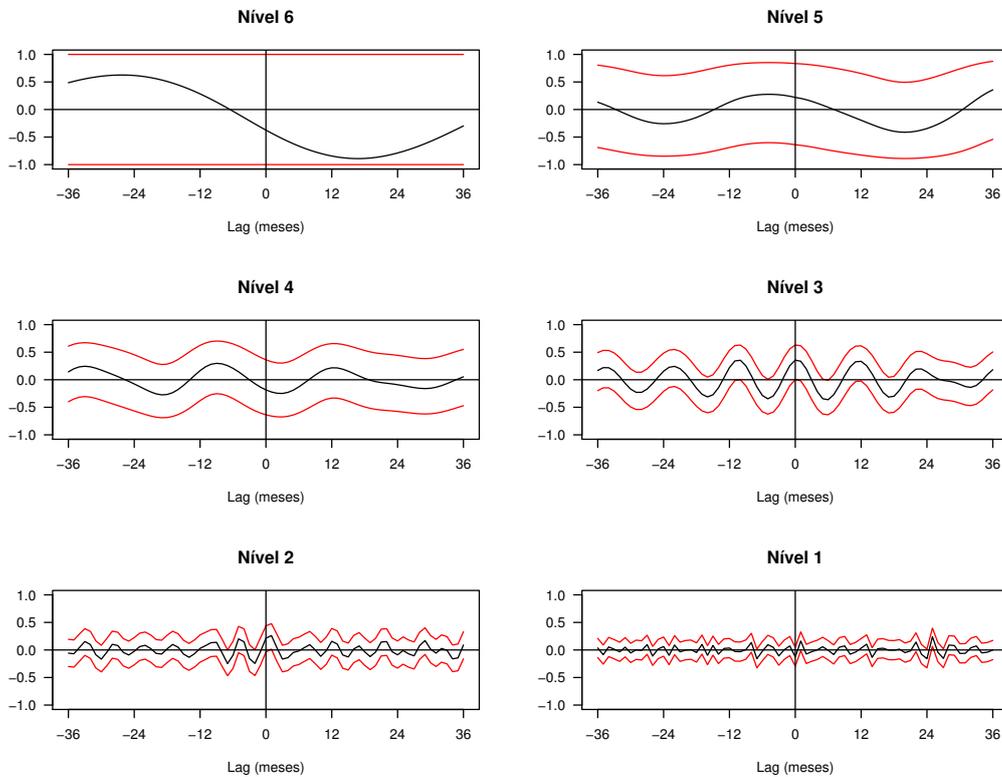


Figura 5 – Correlação cruzada *wavelet* entre inflação e retorno real do Ibovespa.

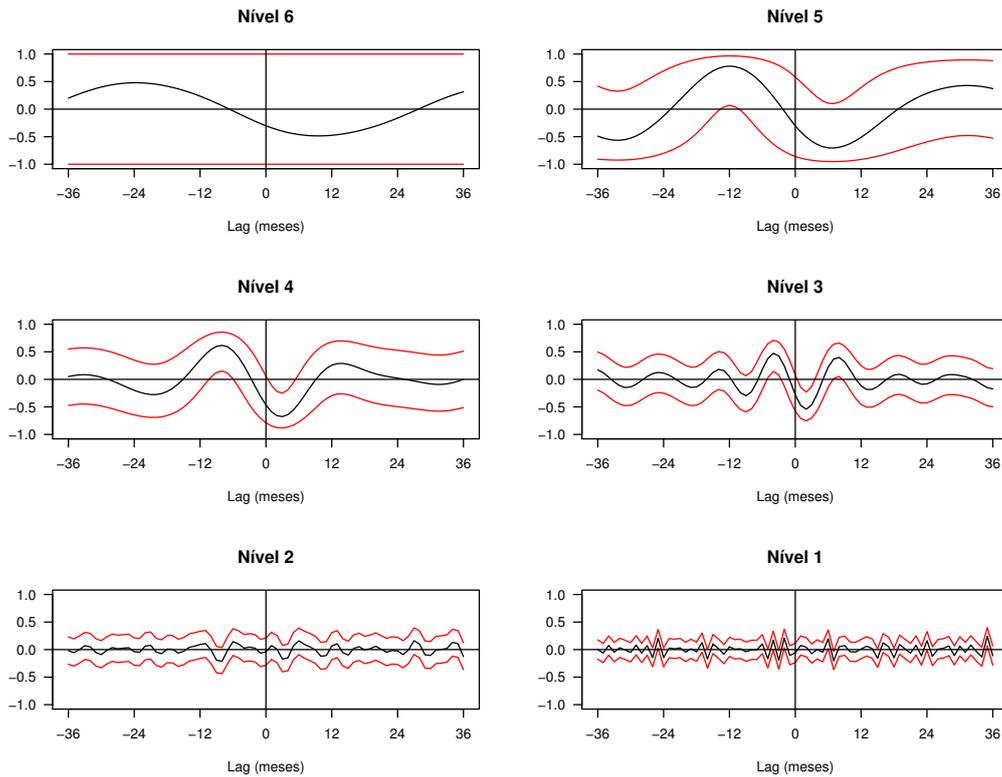


Figura 6 – Correlação cruzada *wavelet* entre o retorno real do Ibovespa e hiato.

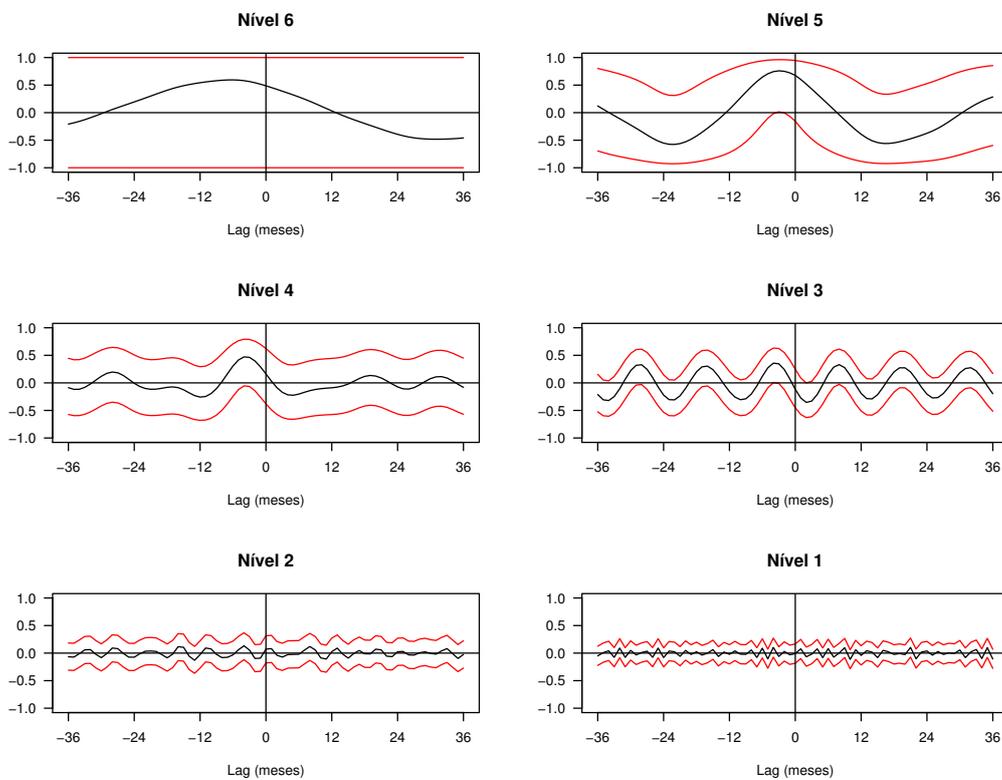


Figura 7 – Correlação cruzada *wavelet* entre o retorno real do Ibovespa e taxa de crescimento da produção industrial.

Fica aparente dessa análise que, ao contrário do caso contemporâneo, a inclusão da inflação não altera a correlação cruzada entre o retorno de ações e a atividade econômica, conforme se espera.

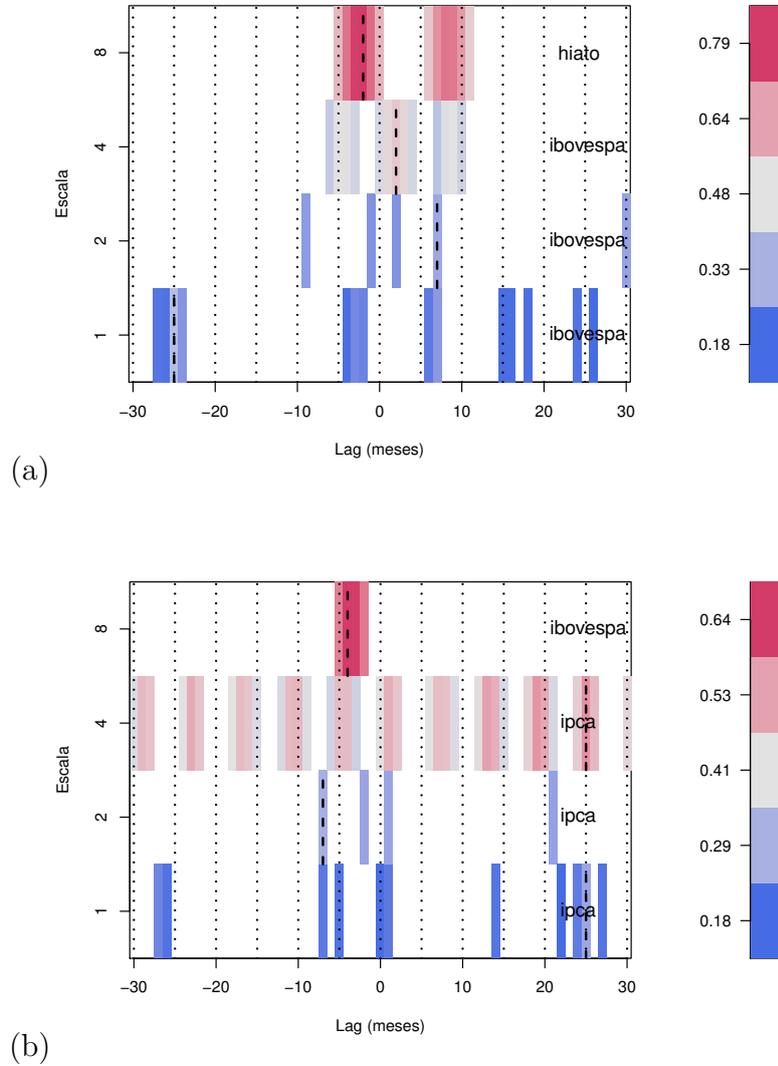


Figura 8 – Correlação cruzada *wavelet*: (a) inflação, retorno real do Ibovespa e hiato; e (b) inflação, retorno real do Ibovespa e taxa de crescimento da produção industrial.

4.1.3 Análise de Multirresolução

A chamada análise de multirresolução (MRA – *Multi-Resolution Analysis*) permite a decomposição aditiva da série, descrevendo suas variações em cada escala específica bem como seu componente de tendência. Isso é conseguido pela inversão da transformada *wavelet* (MODWT, por exemplo) em cada nível separadamente. Seguindo Constantine e Percival (2016), a MRA implica que a série original X possa ser escrita por $X = S_J + \sum_{j=1}^J D_j$, onde D_1, \dots, D_J expressa os detalhes e

S_J a parte suave. Cada D_j é uma série temporal que descreve as variações de X no intervalo de frequências $\left[\frac{1}{2^{j+1}}, \frac{1}{2^j}\right]$. S_J , por sua vez, é o componente suave mostrando as mudanças de X na baixa frequência, $\left[0, \frac{1}{2^{j+1}}\right]$.

A Tabela 2 apresenta as regressões estimadas com as séries derivadas da análise MRA, onde encontram-se os coeficientes angulares (β), as estatísticas t e os coeficiente de determinação (R^2). Os valores R^2 estão quase sempre aumentando à medida que a escala de tempo aumenta dentro dos intervalos de curto, médio e longo prazos. Em D1 (ciclo de 2 a 4 meses), a relação entre o retorno nominal das ações e a inflação é significativamente negativa, o que implica que as ações nominais não estariam acompanhando a inflação de forma a se proteger desta última, mas em linha com a intrigante relação negativa apresentada na literatura. De forma a corroborar, em seguida, testa-se a relação entre retorno real e inflação de forma a verificar a habilidade do primeiro servir de *hedge* contra a inflação. O retorno real das ações também apresenta valor negativo do coeficiente angular. À medida que a escala de tempo aumenta, o coeficiente β mostra um valor positivo em D2, D3, D5 e S7; e um valor negativo nos restantes (D4, D6 e D7). Tal comportamento é semelhante tanto em termos nominais quanto real, ou seja, contraditório. Quando agrega-se, os resultados nominais e reais novamente se parecem, revelando uma relação positiva e significativa no curto e longo prazos, enquanto a relação de médio prazo se mostra negativa mas não é estatisticamente significativa. De forma complementar, apresentam-se regressões do retorno real Ibovespa relativo à variação da produção industrial. Os resultados mostram que no curto prazo os coeficientes não são estatisticamente significativos, mas no médio e longo prazos são positivos e significativos, conforme esperado. De forma geral, a relação entre o retorno nominal de ações e inflação não difere muito da relação entre o retorno real de ações e inflação, dando destaque para a relação positiva observada tanto no curto quanto no longo prazos. Já o retorno real mostra também se relacionar positivamente com a variação da produção no médio e longo prazos.

A Tabela 3 replica o exercício da Tabela 2 considerando a relação entre a inflação com o hiato do produto e, posteriormente, com a variação da produção. Na primeira relação, os valores R^2 estão aumentando à medida que a escala de tempo aumenta, mas apenas o longo prazo se mostra positivamente significativo. Esse resultado parece mostrar uma importante contradição com as correlações obtidas anteriormente. Contudo, deve-se lembrar que na transformada *wavelet* calculam-se implicitamente diferenças entre médias ponderadas. Portanto, nos níveis mais altos da transformada, as séries obtidas do procedimento de multirresolução são mais suaves, reduzindo a variabilidade amostral da variável explicativa e dependente.⁶ Adicional-

⁶ Os exercícios desta subseção têm como inspiração os trabalhos de Kim e In (2005) e Gallegati

Tabela 2 – Regressão no domínio wavelet

Retorno real Ibovespa - Inflação									
	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	S7	
β	-0.070*	0.058*	0.066*	-0.037*	0.057*	-0.027*	-0.022**	0.095*	
	(-2.589)	(2.674)	(4.626)	(-3.188)	(2.505)	(-3.219)	(-2.087)	(14.98)	
R^2	0.03	0.05	0.19	0.08	0.12	0.12	0.05	0.68	
Curto Prazo			Médio Prazo			Longo Prazo			
	D1+D2+D3			D4+D5+D6			D7+S7		
β	0.032**			-0.011			0.023**		
	(2.280)			(-0.699)			(2.266)		
R^2	0.01			0.01			0.05		
Retorno nominal Ibovespa - Inflação									
	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	S7	
β	-0.061**	0.069*	0.076*	-0.027**	0.068*	-0.018**	-0.012	0.106*	
	(-2.231)	(3.140)	(5.325)	(-2.321)	(2.941)	(-2.067)	(-1.148)	(16.74)	
R^2	0.02	0.07	0.23	0.04	0.15	0.05	0.01	0.73	
Curto Prazo			Médio Prazo			Longo Prazo			
	D1+D2+D3			D4+D5+D6			D7+S7		
β	0.042**			-0.001			0.034*		
	(2.998)			(-0.078)			(3.271)		
R^2	0.02			0.00			0.09		
Retorno real Ibovespa - Δ Produtoindustrial									
	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	S7	
β	-0.026	0.104	-0.151	1.293*	3.779*	4.270*	2.208*	2.264*	
	(-0.312)	(0.794)	(-1.581)	(2.620)	(13.08)	(6.489)	(3.145)	(9.307)	
R^2	0.00	0.01	0.02	0.11	0.68	0.40	0.14	0.45	
Curto Prazo			Médio Prazo			Longo Prazo			
	D1+D2+D3			D4+D5+D6			D7+S7		
β	-0.012			2.359*			2.248*		
	(-0.162)			(6.284)			(5.146)		
R^2	0.00			0.29			0.28		

Nota: * e ** significativos aos níveis de 1% e 5%, respectivamente. () Estatística t.

mente, os níveis que contemplam os ciclos de longo prazo carregam mais coeficientes com problemas de borda. No caso do cálculo das correlações *wavelets* precedentes, o estimador da variância (covariância) é não enviesado, ou seja, controlam-se os coeficientes de borda e ajustam-se os graus de liberdade na determinação do intervalo de confiança. Em relação ao caso da relação entre a inflação e a taxa de variação da produção industrial, apenas em D3 e D6 obtém-se significância negativa, mas em

et al. (2011). Uma análise mais rigorosa sobre a significância dos coeficientes e a possibilidade de inferência espúria, principalmente no longo prazo, requer um exame mais aprofundado, o que está além do escopo deste trabalho e poderia ser indicado como um tópico interessante para pesquisa futura (ver Lundberg (2015)). De todo modo, os resultados de curto e médio prazos aqui obtidos corroboram os achados anteriores e a contradição no longo prazo fortalece a recomendação de análises mais robustas referentes à relação inflação-hiato do produto.

nenhum dos prazos agregados tal resultado se mantém.

Logo, apesar de surgir alguns resultados conforme esperado, o mesmo não se mostra consistente. Entretanto, pode-se observar a relevância de um comportamento heterogêneo ao longo do tempo e entre as escalas.

Tabela 3 – Regressão no domínio wavelet

Inflação - Hiato do produto								
	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	S7
β	-1.230	-0.101	-0.172	1.758	-0.525	-14.93*	82.08*	-129.7*
	(-1.146)	(-0.078)	(-0.071)	(1.798)	(-0.732)	(-5.667)	(7.348)	(-10.99)
R^2	0.01	0.00	0.00	0.03	0.01	0.21	0.42	0.56
	Curto Prazo			Médio Prazo			Longo Prazo	
	D1+D2+D3			D4+D5+D6			D7+S7	
β	-0.250			0.223			28.16**	
	(-0.187)			(0.318)			(2.180)	
R^2	0.00			0.00			0.04	
Inflação - Δ Produto industrial								
	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	S7
β	0.225	-0.521	-1.824*	-3.950	1.933	-26.72*	-10.49	4.161
	(1.193)	(-1.191)	(-3.008)	(-1.021)	(0.573)	(-3.810)	(-1.574)	(1.436)
R^2	0.01	0.01	0.07	0.02	0.00	0.10	0.03	0.02
	Curto Prazo			Médio Prazo			Longo Prazo	
	D1+D2+D3			D4+D5+D6			D7+S7	
β	-0.282			-2.745			-0.145	
	(-1.149)			(-0.602)			(-0.031)	
R^2	0.00			0.01			0.00	

Nota: * e ** significativos aos níveis de 1% e 5%, respectivamente. () Estatística t.

4.1.4 Digressão sobre o Hiato

Uma questão importante é a sensibilidade dos resultados em relação às medidas do hiato. Existem várias formas de se obtê-lo, como pode ser visto em, por exemplo, [Gentil e Messenberg \(2009\)](#). Neste Artigo, consistente com a metodologia empregada, o hiato é derivado via a metodologia *wavelet*.

Os coeficientes *wavelets* permitem a reconstrução perfeita da série através do processo da transformada inversa. No entanto, assumindo a hipótese de que a série observada é composta por um sinal mais ruído, a transformada *wavelet* pode requerer uma quantidade bem menor de coeficientes para isolar as propriedades do sinal (determinístico ou estocástico). Essa suposição leva à ideia de aplicar à transformada diferentes funções e níveis de limiares (*threshold*) tal que a regra reduza a zero alguns coeficientes. Outro procedimento é determinar a própria regra de encolhimento (*shrinkage*) por diversos métodos, como a formulação bayesiana, que

consiste na estimação simultânea do nível e da função de encolhimento via a regra de Bayes. Esse é o esquema de referência adotado neste trabalho.

A estimação do sinal via a abordagem *threshold* ou *shrinkage* percorre as seguintes etapas: a) cálculo dos coeficientes *wavelets*; b) aplicação da regra de limiar ou encolhimento nos coeficientes e; c) estimação do sinal via a transformada inversa usando os coeficientes obtidos no passo anterior.

Na formulação bayesiana de [Johnstone e Silverman \(2005b\)](#), cada coeficiente *wavelet* (d) assume valor zero com probabilidade $(1 - \omega)$ e a parte não nula da *prior* é proveniente de uma densidade simétrica de cauda pesada (*heavy-tailed*) γ com probabilidade ω . Essa mistura significa que a *prior* pode ser escrita como:

$$f_{prior}(d) = \omega\gamma(d) + (1 - \omega)\delta_0(d), \quad (2)$$

onde δ_0 representa uma função de probabilidade com massa concentrada no ponto zero. Essa especificação captura a característica esparsa dos coeficientes *wavelets*: a maioria sendo zero, como pode ser notado na Figura 1.

A densidade marginal do coeficiente observado (d^*) é dada por:

$$\omega g(d^*) + (1 - \omega)\phi(d^*), \quad (3)$$

onde g é a densidade obtida da convolução de γ com a densidade normal padrão ϕ , sendo a distribuição condicional de d^* dada por $[d^*|d \sim \mathcal{N}(d, \sigma^2)]$.

O parâmetro ω é escolhido automaticamente via a estimativa de máxima verossimilhança marginal dos coeficientes observados (d^*) e substituído de volta no modelo bayesiano. O estimador $\hat{\omega}$ de ω , é obtido pela maximização de:

$$l(\omega_j) = \sum_t \log \{ \omega_j g(d_{j,t}^*) + (1 - \omega_j)\phi(d_{j,t}^*) \}, \quad (4)$$

sendo possível estimar o parâmetro $\hat{\omega}_j$ para cada escala.

A implementação do método foi feita pelo pacote `EbayesThresh` ([Silverman \(2012\)](#)) da plataforma R, explicado em [Johnstone e Silverman \(2005a\)](#). A rotina aplicada foi a básica, o que significa usar como *prior* para a densidade $\gamma(d)$ a distribuição de Laplace (exponencial dupla) dada por $\frac{1}{2}ae^{-a|\gamma(d)|}$, com $a = 0,5$. Alternativamente, o modelo foi especificado de forma que o parâmetro a também seja uma estimativa obtida dos dados, ver [Johnstone e Silverman \(2005b\)](#). O valor do desvio padrão σ_j é a mediana dos desvios absolutos dos coeficientes em relação a zero em cada escala, sendo esses coeficientes estimados por MODWT usando o filtro LA(8) e $J = 4$. A Tabela 4 contém a estimativas dos parâmetros do modelo.

No modelo 1 da Tabela 4, o valor de a é determinado como sendo igual a 0,5 e no modelo 2 estimado de acordo com os dados. A estimação de a , ao invés do valor pré-determinado, implica a redução de ω , a proporção dos coeficientes não nulos, e o aumento do limiar (*threshold*), o que resulta numa série mais suave quando reconstruída. Nos dois modelos, o número de coeficientes não nulos aumenta de acordo com a escala (nível), o que era esperado uma vez que o ruído tende a se concentrar nas escalas mais finas.

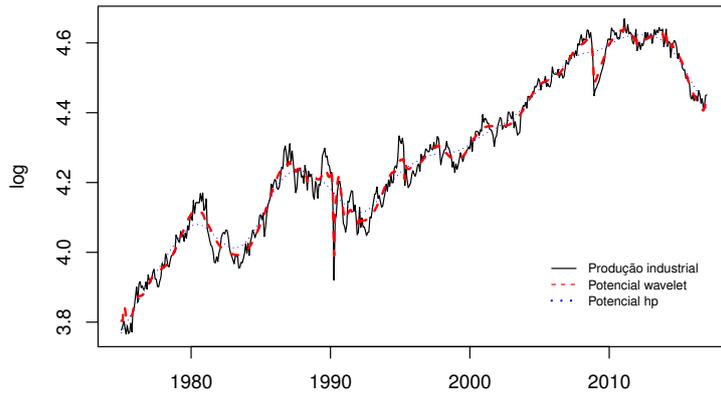
Tabela 4 – Estimativas dos parâmetros do modelo bayesiano

Parâmetros	Nível			
	1	2	3	4
Modelo 1				
a	0,500	0,500	0,500	0,500
ω	0,109	0,146	0,158	0,180
σ	0,704	0,657	1,039	1,444
Limiar (múltiplo de σ_j)	2,776	2,628	2,585	2,512
Modelo 2				
a	0,338	0,291	0,377	0,396
ω	0,073	0,09	0,124	0,146
σ (igual ao modelo 1)	0,704	0,657	1,039	1,444
Limiar (múltiplo de σ_j)	2,949	2,874	2,711	2,629

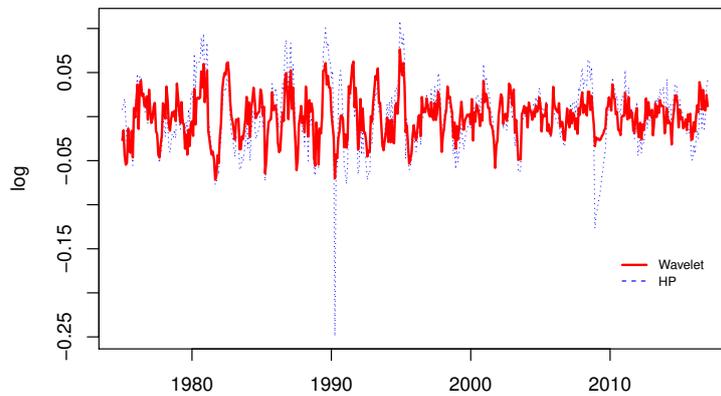
Como se observa na Figura 9, o hiato estimado via o método de limiarização de [Johnstone e Silverman \(2005b\)](#) é um pouco mais atenuado que o computado pelo filtro HP, como em 1990 e 2008, por exemplo. Entretanto, a Figura 10 (a) mostra que isso não causa impacto em termos da forma como essa variável se correlaciona com a inflação, tal como visto na Figura 4. Por outro lado, a correlação do hiato com o retorno real do Ibovespa se altera. As relações observadas nos níveis 4 e 5 na Figura 6 perdem significância na Figura 10 (b). Somente a associação nos ciclos de 8 a 16 meses (nível 3) é estatisticamente significativa. Isso faz sentido na medida em que o filtro *wavelet* atribuiu maior peso aos ciclos de curto prazo na construção do hiato, reduzindo a importância do longo prazo. A mensagem é que o modo como o retorno real e a atividade econômica se relacionam nas diferentes escalas depende da forma de medida do hiato.

4.2 Abordagem Contínua

A versão contínua da análise *wavelet* possibilita uma visualização melhor e complementar dos resultados em relação à evolução da variância da inflação, hiato do produto, retorno real do Ibovespa e taxa de crescimento da produção industrial



(a)



(b)

Figura 9 – Estimativa *wavelet* da produção industrial e hiato: (a) produção industrial dessazonalizada observada, *wavelet* e hp; e (b) estimativa do hiato *wavelet* e hp.

nas diferentes escalas de tempo. Além disso, serve como um meio de testar a robustez dos resultados obtidos na versão discreta, pois os filtros aplicados são diferentes.

Na Figura 11 mostram-se os respectivos espectros de potência *wavelets* para o período 1996m01 a 2017m01, calculados com base na equação (14) do Apêndice B. Esse espectro permite inferir o quanto uma determinada frequência contribui na variância da série em cada ponto do tempo. O eixo da ordenada representa o período do ciclo. Quanto mais acima nesse eixo, maior o período e menor a frequência. Por outro lado, em períodos menores a frequência é mais alta, indicando ciclos mais frenéticos. No conceito de temperatura das cores, as mais quentes (vermelho e amarelo) representam as regiões de maior volatilidade na série, e as mais frias (azul e verde) o caso contrário. As linhas brancas de contorno limitam as regiões

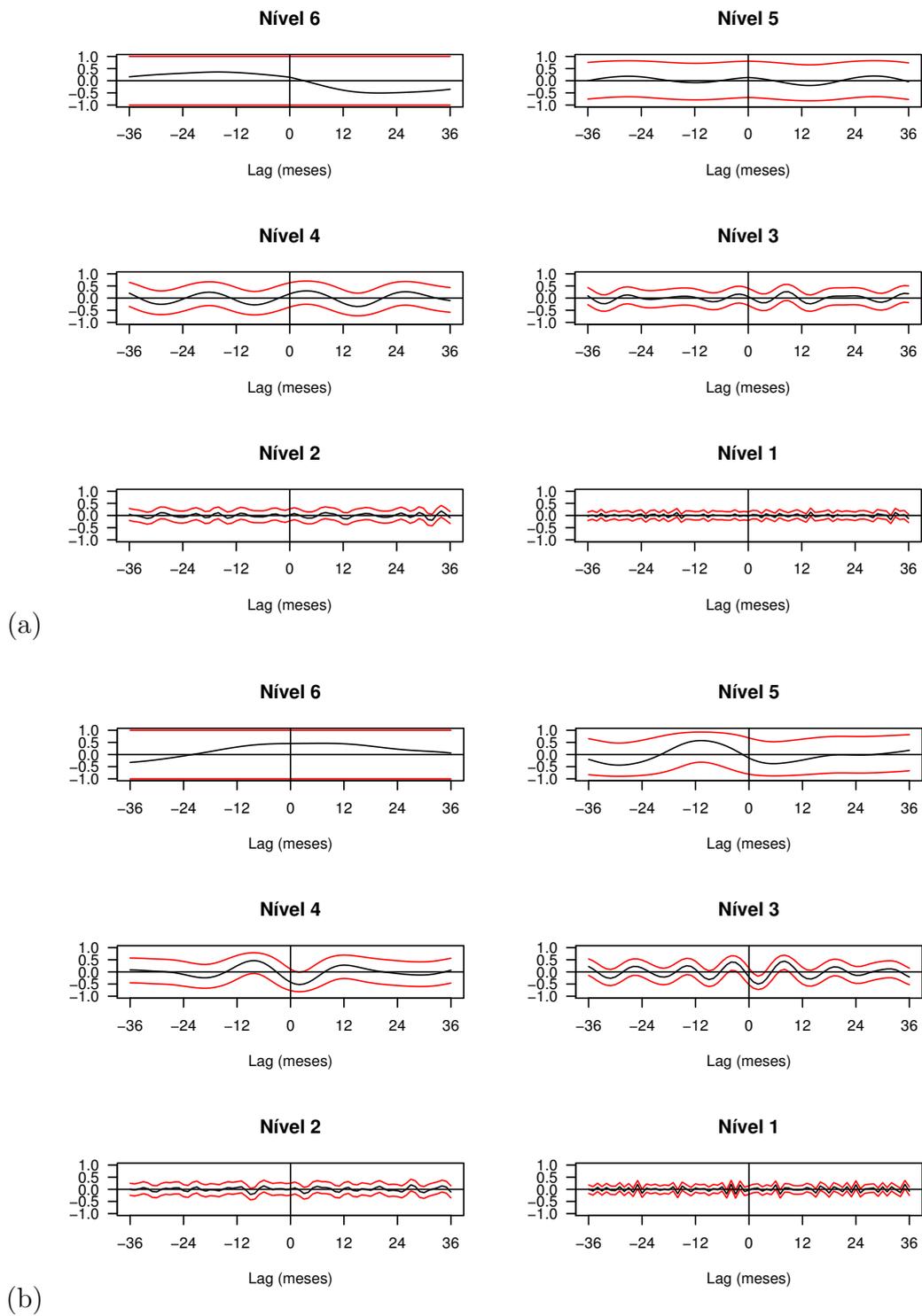


Figura 10 – Correlação cruzada do hiato calculado via a metodologia *wavelet* com: (a) inflação; e (b) retorno real do Ibovespa.

de significância ao nível de 5%. A região externa ao desenho de um cone é a área sujeita a efeitos de borda e, portanto, onde as estatísticas devem ser interpretadas com cautela.

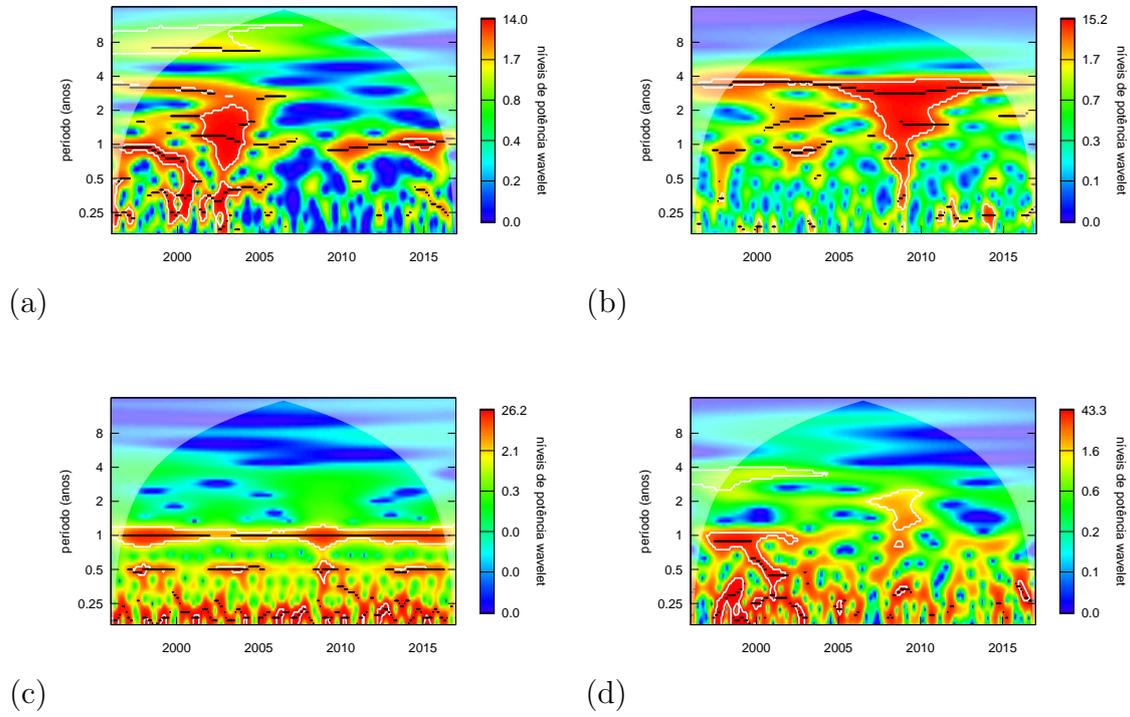


Figura 11 – Espectro *wavelet*: (a) inflação; (b) hiato; (c) taxa de crescimento da produção industrial; e (d) retorno do Ibovespa.

A Figura (11) (a) sugere que de 1996 a 2004, período pós-Plano Real até segundo ano do governo Lula, a variabilidade da inflação foi determinada por ciclos, estatisticamente significativos quando comparados ao espectro de um processo AR(1), de alta frequência (inferiores a 1 ano). Entre 2002 e 2004, os ciclos de período de 1 a 2 anos também se tornaram estatisticamente importantes. De 2005 a 2010, a volatilidade em todas as frequências diminuiu, caracterizando um período de moderação na variabilidade da inflação. A partir de então, a variância da série aumentou novamente, se concentrando em ciclos de frequência anual, principalmente em 2014 e 2015. Explicações possíveis para esses resultados podem estar relacionadas à manutenção da política macroeconômica na transição de governo no início dos anos 2000 e ao comportamento dos preços administrados.⁷

Durante todo o período considerado, o espectro *wavelet* do hiato do produto da Figura 11 (b) contém alta potência no ciclo de negócios, tal como definido anteri-

⁷ A transformada MODWT dos preços monitorados, não reportada, indica que até 2007 havia a presença de ciclos nas escalas 1, 2, 4 e 8. A partir de então, esses preços tornam-se estáveis, voltando em 2015, aproximadamente, a conter flutuações nas escalas de curto prazo.

ormente. De 2008 a 2012, coincidente com o início da crise financeira internacional, os ciclos de curto prazo também se manifestaram importantes na variabilidade da série. Essa volatilidade de curto prazo também esteve presente em 1998 e 2003, onde observa-se a crise cambial de 98 e os efeitos da crise de confiança na economia brasileira de 2002.

Na Figura 11 (c) é notável a presença de ciclos de altíssima frequência, inferiores a 4 meses, e o ciclo anual da taxa de variação da produção industrial. Eventualmente, ocorrem flutuações semestrais significativas, espaçadas com certa regularidade, como em 1997, 2003, 2008 e 2014-2015. O formato relativamente padronizado do espectro sugere que, do ponto de vista da análise *wavelet*, a volatilidade da produção industrial não apresenta picos ao longo do tempo, o que poderia se supor diante da maior exposição aos choques a que o produto poderia estar submetido em decorrência do processo de abertura comercial que se iniciou nos anos 1990.

Em consonância com a evidência encontrada na análise discreta, o espectro do retorno real do Ibovespa desenhado na Figura 11 (d) é bastante caracterizado por ciclos de curto prazo, destacando-se o horizonte 1998-2003. É possível identificar ciclos na frequência acima de 1 ano entre 2008 e 2010. Entre 2010 e 2014 há certa moderação na variabilidade cíclica de curto prazo.

Na Figura 12 se observa a coerência e a diferença de fase entre pares de variáveis (vide equações (16) e (18) do Apêndice B), o que permite estudar o sincronismo entre elas. Pode-se perceber a evolução temporal entre as escalas ou períodos de tempo medidos em meses. As regiões estatisticamente significativas são delimitadas por linhas brancas e preenchidas com setas, que indicam a diferença de fase entre as variáveis. A direção e a rotação das setas determinam, respectivamente, o sinal e a antecedência da relação, como pode ser consultado em Aguiar e Soares (2011). Por exemplo, as setas voltadas para a direita e para baixo na Figura 12 (a) informam que a inflação e o hiato do produto são positivamente correlacionados, com o ciclo do hiato antecedendo ao da inflação. Valores baixos de coerência são indicados pela cor azul e os mais altos por vermelho. O cone de influência separa o plano em regiões onde as estatísticas são mais confiáveis.

Antes de 2000, a inflação e o hiato do produto flutuavam em fases opostas, com o hiato sendo a variável a se mover primeiro. Essa observação é estatisticamente válida para o período associado ao ciclo anual. Houve mudança na frequência do ciclo e no sincronismo da relação entre as duas séries no intervalo próximo a 2002-2005, no qual o ciclo do hiato antecedia ao da inflação, agora na frequência próxima a dois anos. A partir de então, regiões de alta coerência, estatisticamente significativas, são escassas, levando a uma fraca ligação entre inflação e hiato do produto. Portanto, a

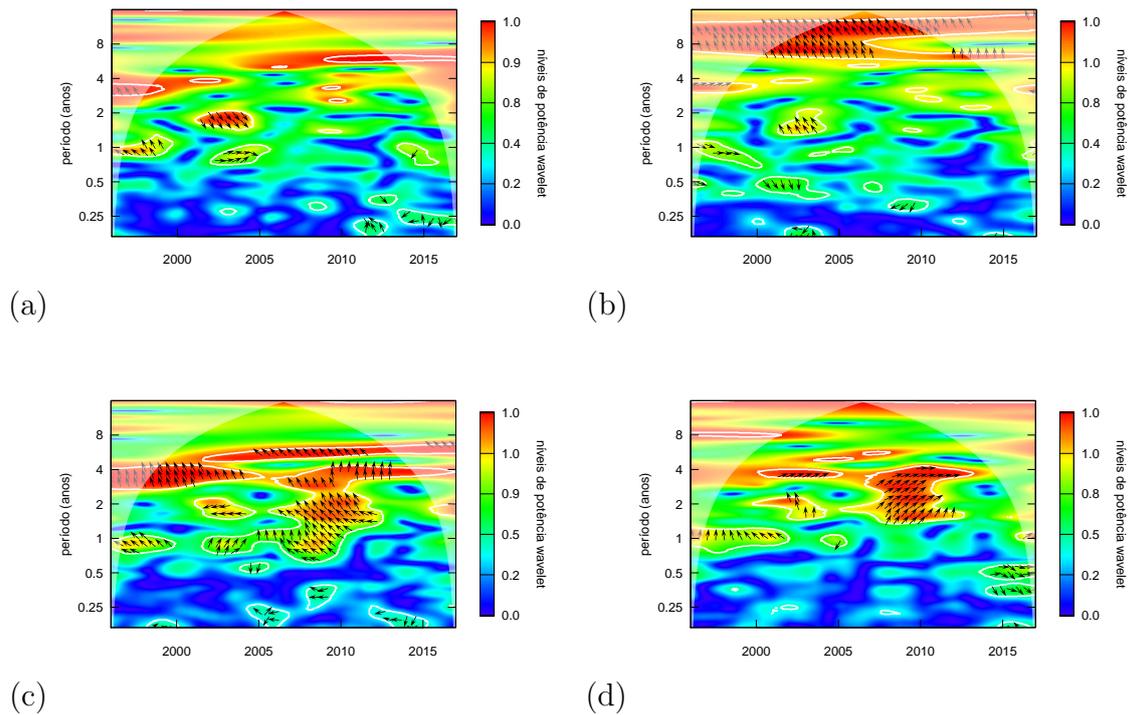


Figura 12 – Coerência *wavelet*: (a) inflação e hiato; (b) inflação e retorno do Ibovespa; (c) retorno do Ibovespa e hiato; e (d) retorno do Ibovespa e taxa de crescimento da produção industrial.

análise contínua revela um detalhe adicional em relação à discreta: ainda que essa relação não seja expressiva na amostra como um todo, ela varia ao longo do tempo e já foi mais forte no passado, o que está de acordo com a observação de [Blanchard et al. \(2016\)](#) apresentada ao final desta subseção.

Já a coerência entre o retorno do Ibovespa e a inflação, Figura 12 (b), é relativamente baixa, com alguma relevância entre 2002 e 2004.

Por outro lado, a coerência entre o retorno do Ibovespa e o hiato, Figura 12 (c), é mais bem estabelecida. Há uma associação entre os ciclos de período superior a quatro anos durante praticamente todo o período de análise. O impacto da crise financeira internacional também pode ser percebido. Entre 2008 e 2010, há um espalhamento das regiões de alta coerência no ciclo de 4 anos em direção aos de até 1 ano, com menor magnitude entre 2 e 3 anos, aproximadamente. Ainda analisando esse período, as flechas da figura levam a concluir que as duas variáveis flutuavam em fase opostas nos ciclos de até 2 anos, movendo-se primeiro o hiato. Ao nível de atividade acima do potencial em um determinado período advinha à redução no retorno do Ibovespa. Nos ciclos vizinhos a 4 anos a fase muda, com alternância na variável antecedente. A Figura 12 (c) permite concluir que as correlações observadas na Figura 6 são influenciadas pelos eventos entre 2008 e 2012.

O cálculo da coerência no caso retorno do Ibovespa versus a taxa de crescimento da produção industrial é marcado por valores altos em torno do quadriênio 2008-2012 nos ciclos entre 2 a 4 anos, Figura 12 (d). As variáveis são positivamente correlacionadas. Isso sugere que nesse período e nesse horizonte cíclico o aumento (redução) do retorno real do Ibovespa precede ao acréscimo (decréscimo) da produção industrial. Nota-se que a região de alta coerência é um pouco distinta da observada no caso do hiato. Note que essa análise confirma e complementa o observado na Figura 7. Ratifica que os ciclos relevantes são superiores a 2 anos (nível 5 da Figura 7) e suplementa no sentido de estabelecer onde exatamente essa relação se torna mais forte, 2008-2012.

Na Figura 13, coloca-se lado a lado a coerência total e parcial *wavelet* entre as variáveis, seguindo Aguiar e Soares (2011). Essa abordagem é uma extensão ao conceito de coerência, análoga à diferença entre a noção de correlação simples e parcial no domínio do tempo. A ideia é verificar a relação entre duas variáveis controlando o efeito de uma terceira, que eventualmente compartilha de um mesmo ciclo com as outras duas. Na Figura 13 (a), à esquerda, calcula-se a coerência entre a inflação e o hiato e, à direita, a coerência parcial entre essas mesmas variáveis após controlar os ciclos comuns do retorno real do Ibovespa. O painel (b) destaca a relação entre a inflação e o retorno real do Ibovespa, sendo o hiato a variável a ser controlado no painel à direita. Em (c) avalia-se o retorno real do Ibovespa e o hiato, controlando a inflação; e em (d) o hiato é substituído pela taxa de crescimento do produto industrial.

Os resultados mostrados na Figura 13 (a) e (b) não mudam a percepção da forma como a inflação se relaciona com o hiato e o retorno real do Ibovespa, respectivamente. Por outro lado, o cálculo da coerência parcial altera a interpretação da ligação cíclica do retorno do Ibovespa com o hiato e a taxa de variação da produção industrial, (c) e (d). A relação de curto prazo, observada em torno de 2008, entre o retorno do Ibovespa e o hiato do produto, lado esquerdo de (c), fica mais restrita ao curtíssimo prazo quando se computa a coerência parcial, ao passo que o ciclo acima de 3 anos se estende de 1996 até 2008. No caso da taxa de crescimento da produção industrial e o retorno do Ibovespa, o cálculo da coerência parcial faz surgir alguma relação nos ciclos de alta frequência e torna mais ampla a relação entre essas variáveis no ciclo de 3 anos.

De forma geral e diante dos diversos resultados empíricos, observa-se, às vezes, resultados em direção ao esperado, seja a favor da relação positiva entre inflação e hiato do produto presente em uma curva de Phillips ou da hipótese de Fisher. Ainda, apesar de em algumas escalas a intrigante relação negativa entre retorno de ações e inflação se fazer presente, os resultados não corroboram a hipótese *proxy* de

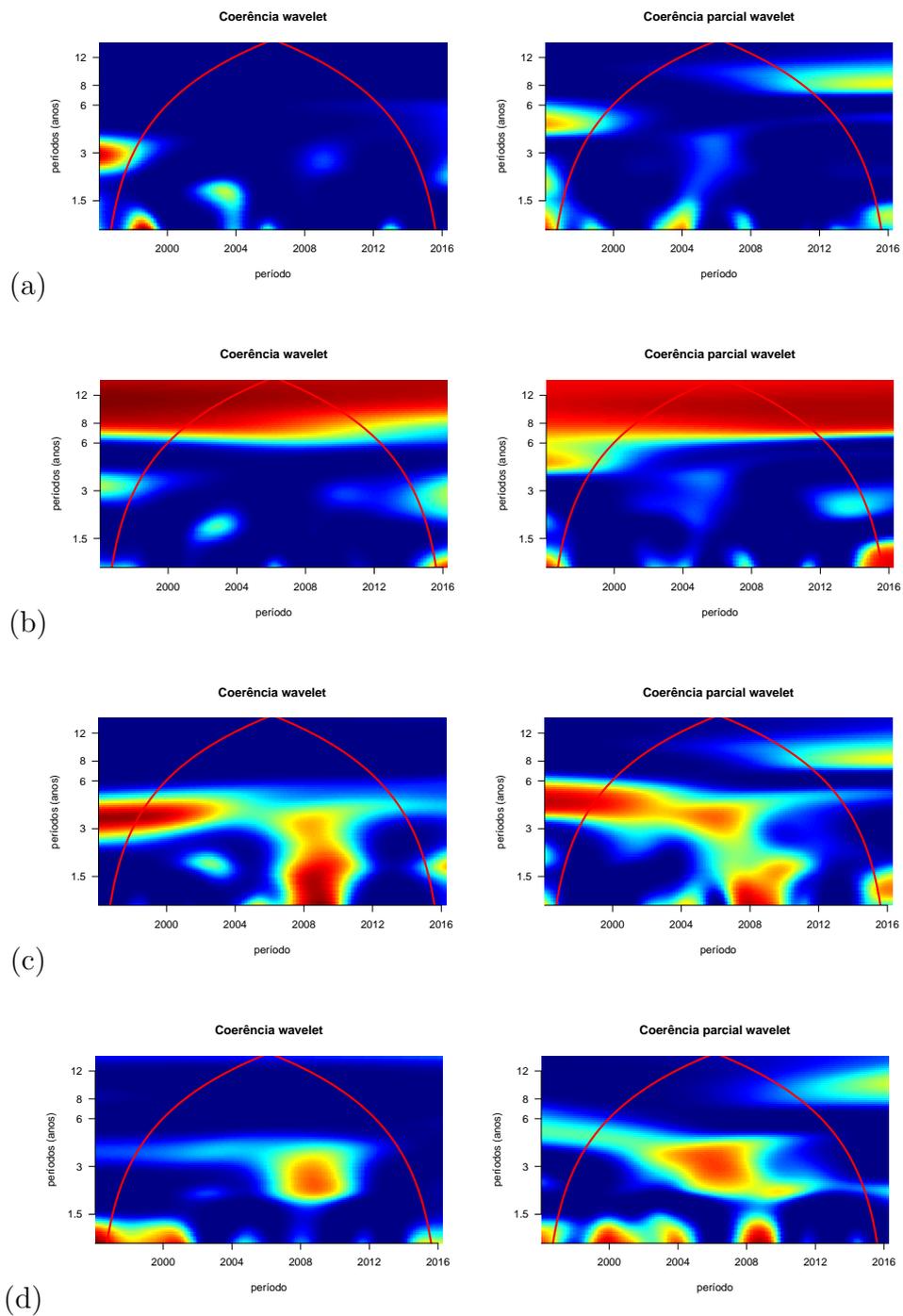


Figura 13 – Coerência e coerência parcial *wavelet*: (a) inflação e hiato; (b) inflação e retorno real do Ibovespa; (c) retorno real do Ibovespa e hiato; e (d) retorno real do Ibovespa e taxa de crescimento da produção industrial.

Fama (1981) no sentido de que a mesma seria induzida pela relação negativa entre a inflação e atividade econômica (estagflação). Contudo, os mesmos não são consistentes ao longo das frequências e tempo, significativa heterogeneidade é observada. Todavia, cabe destacar que, desde o início da crise de 2008, a relação entre inflação e produto nas economias mais avançadas tem sido substancialmente diferente da observada anteriormente, o que se pode esperar também da relação retorno de ações e inflação. Conforme Blanchard et al. (2016), existem evidências convincentes de que a relação entre hiato do produto e inflação já não é a mesma de antes, pois tem-se observado uma relação fraca (tanto em magnitude quanto em significância estatística) entre hiato do produto e inflação dada uma taxa de inflação esperada. Assim, torna-se relevante para a política monetária se essa relação mais fraca é uma tendência de longo prazo ou um resultado da crise em si, seja nas economias avançadas ou mesmo nas emergentes como a do Brasil.

5 Considerações Finais

A principal inovação deste trabalho foi utilizar a metodologia *wavelet* na análise da relação entre retorno de ações, inflação e atividade econômica brasileira. A aplicação desse método faz sentido pois a hipótese de Fisher - relação entre o retorno de ativos nominais e inflação, o *link* entre retorno reais de ações e atividade econômica por meio do modelo fluxo de caixa descontado, a hipótese *proxy* de Fama (1981) e a relação entre inflação e atividade econômica prescrita na curva de Phillips podem depender da escala de medida dessas variáveis decompostas e agregadas no curto, médio e longo prazos. A abordagem *wavelet* permite exatamente a decomposição das séries escala por escala.

Dessa forma, observa-se a relação temporal entre a inflação, hiato do produto, taxa de crescimento da produção industrial e retorno do Ibovespa em diferentes escalas de tempo. Empregou-se a transformada *wavelet* discreta na versão MODWT. Como procedimento complementar, as séries também foram decompostas e analisadas na versão contínua. A investigação englobou a decomposição da variância das séries; o cômputo da correlação simples, parcial, múltipla e cruzada; a estimação de regressões em várias escalas; e a obtenção do hiato via a suavização bayesiana no método *wavelet*.

Numa perspectiva geral, apesar de em algumas escalas a intrigante relação negativa entre retorno de ações e inflação se fazer presente, os resultados não corroboram a hipótese *proxy* de Fama (1981) no sentido de que a mesma seria induzida pela relação negativa entre a inflação e atividade econômica. Ainda, a relação entre retorno real de ações e atividade econômica não é independente da inflação, como

implica a hipótese de Fisher.

Do ponto de vista mais descritivo, os resultados mostram evidências de que a estrutura das séries não é a mesma em termos de escala. Na inflação e hiato predominam as escalas de médio e longo prazos, enquanto na composição da taxa de crescimento da produção industrial e retorno real do índice acionário o componente de curto prazo é o determinante. A análise *wavelet* também revela que a relação entre as variáveis é bastante moderada ao longo do tempo e, quando existente, predomina nas escalas de médio e longo prazos e tende a se pronunciar nos momentos em que eventos anormais afetam significativamente a economia, como a última crise financeira internacional e a crise de confiança na economia brasileira no início dos anos 2000.

Em particular, os resultados empíricos levaram às seguintes conclusões, a saber: i) da análise de variância, os ciclos relevantes da inflação e do hiato do produto são superiores a 1 ano, ao passo que é de curto prazo o do retorno real do Ibovespa e do crescimento da produção industrial; ii) a análise da correlação mostrou muito pouca evidência de relação contemporânea, cruzada, parcial ou múltipla; iii) a regressão das séries em cada escala, obtidas da análise de multirresolução, confirmou os resultados anteriores no tocante ao curto e médio prazos; iv) a relação entre a inflação e o hiato do produto não é sensível ao modo como o hiato foi determinado, ou seja, tanto o hiato HP como o *wavelet* levam às mesmas conclusões, embora essas duas séries tenham estruturas diferentes. Por outro lado, a correlação com o retorno real do Ibovespa fica mais restrita ao curto prazo devido ao fato de o método de suavização utilizado na construção do hiato atribuir maior peso aos ruídos na escala mais fina.

A análise contínua complementou a abordagem discreta e, em um certo sentido, visto que os filtros aplicados são diferentes, serviu como um instrumento para testar a robustez dos resultados. De fato, as conclusões são similares. Porém, dos resultados dessa metodologia vale destacar os seguintes pontos que ficaram mais evidentes: i) após passar por um período onde estiveram presentes ciclos de alta frequência, a partir de 2004 a inflação entrou em uma fase de moderação, até 2010; ii) como esperado, o hiato do produto foi a variável mais afetada pela crise financeira internacional, manifestando-se ciclos de diversas ordens; iii) o espectro da taxa de crescimento da produção industrial é bastante concentrado na alta frequência, com formato relativamente uniforme durante o período estudado, o que pode sugerir que o processo de abertura comercial não influenciou a geração de picos nessa variável; e iv) a volatilidade de curto prazo do retorno real do índice acionário no período 1998 a 2003 foi bastante expressiva e o impacto da crise financeira internacional não foi drástico; v) ainda que a relação entre inflação e hiato do produto seja reduzida

na amostra como um todo, corroborando a análise discreta, ela varia ao longo do tempo e já foi mais forte no passado.

Referências

AGUIAR, L. F.; SOARES, M. J. **The Continuous Wavelet Transform: A Primer**. [S.l.], 2011. Disponível em: <<http://EconPapers.repec.org/RePEc:nip:nipewp:16/2011>>.

ALAGIDEDDE, P.; PANAGIOTIDIS, T. Stock returns and inflation: Evidence from quantile regressions. **Economics Letters**, v. 117, n. 1, p. 283–286, 2012. Disponível em: <<http://EconPapers.repec.org/RePEc:eee:ecolet:v:117:y:2012:i:1:p:283-286>>.

BLANCHARD, O.; DELL'ARICCIA, G.; MAURO, P. Introdução: repensando a política macroeconômica II. In: AKERLOF, G. et al. (Ed.). **O que nós aprendemos: a política macroeconômica no pós-crise**. 1. ed. [S.l.]: Rio de Janeiro, RJ: Alta Books, 2016. p. 352.

BODIE, Z. Common stocks as a hedge against inflation. **Journal of Finance**, v. 31, n. 2, p. 459–70, 1976. Disponível em: <<http://EconPapers.repec.org/RePEc:bla:jfinan:v:31:y:1976:i:2:p:459-70>>.

CANOVA, F.; NICOLÓ, G. D. Stock returns, term structure, inflation, and real activity: An international perspective. **Macroeconomic Dynamics**, v. 4, n. 03, p. 343–372, 2000. Disponível em: <http://EconPapers.repec.org/RePEc:cup:macdyn:v:4:y:2000:i:03:p:343-372_01>.

CONSTANTINE, W.; PERCIVAL, D. **wmtsa: Wavelet Methods for Time Series Analysis**. [S.l.], 2016. R package version 2.0-2. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=wmtsa>>.

FAMA, E. Stock returns, real activity, inflation, and money. **American Economic Review**, v. 71, n. 4, p. 545–65, 1981. Disponível em: <<http://EconPapers.repec.org/RePEc:aea:aecrev:v:71:y:1981:i:4:p:545-65>>.

FAMA, E. F.; SCHWERT, G. Asset returns and inflation. **Journal of Financial Economics**, v. 5, n. 2, p. 115–146, 1977. Disponível em: <<http://EconPapers.repec.org/RePEc:eee:jfinec:v:5:y:1977:i:2:p:115-146>>.

FELDSTEIN, M. Inflation and the stock market. **American Economic Review**, v. 70, n. 5, p. 839–47, 1980. Disponível em: <<http://EconPapers.repec.org/RePEc:aea:aecrev:v:70:y:1980:i:5:p:839-47>>.

FERNÁNDEZ-MACHO, J. Wavelet multiple correlation and cross-correlation: A multiscale analysis of eurozone stock markets. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 391, n. 4, p. 1097 – 1104, 2012. ISSN 0378-4371. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437111008375>>.

GALLEGATI, M. Wavelet analysis of stock returns and aggregate economic activity. **Computational Statistics Data Analysis**, v. 52, n. 6, p. 3061 – 3074, 2008. ISSN 0167-9473. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167947307002915>>.

GALLEGATI, M.; GALLEGATI, M. Wavelet Variance Analysis of Output in G-7 Countries. **Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics**, v. 11, n. 3, p. 1–25, September 2007. Disponível em: <<https://ideas.repec.org/a/bpj/sndec/v11y2007i3n6.html>>.

GALLEGATI, M. et al. The US wage phillips curve across frequencies and over time. **Oxford Bulletin of Economics and Statistics**, Blackwell Publishing Ltd, v. 73, n. 4, p. 489–508, 2011. ISSN 1468-0084. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/j.1468-0084.2010.00624.x>>.

GENÇAY, R.; FAN, Y. **Unit Root Tests with Wavelets**. [S.l.], 2007. Disponível em: <<https://ideas.repec.org/p/pramprapa/9832.html>>.

GENÇAY, R.; SELÇUK, F.; WHITCHER, B. **An introduction to wavelets and other filtering methods in finance and economics**. San Diego: Academic Press, 2002.

GENTIL, D. L.; MESSEMBERG, R. P. (Org.). **Crescimento econômico : produto potencial e investimento**. Rio de Janeiro: IPEA, 2009.

GESKE, R.; ROLL, R. The fiscal and monetary linkage between stock returns and inflation. **Journal of Finance**, v. 38, n. 1, p. 1-33, 1983.

GULTEKIN, N. B. Stock market returns and inflation: Evidence from other countries. **Journal of Finance**, v. 38, n. 1, p. 49–65, 1983. Disponível em: <<http://EconPapers.repec.org/RePEc:bla:jfinan:v:38:y:1983:i:1:p:49-65>>.

JAFFE, J. F.; MANDELKER, G. The fisher effect for risky assets: an empirical investigation. **Journal of Finance**, v. 31, p. 447–458, 1976.

JOHNSTONE, I.; SILVERMAN, B. Ebayesthresh: R programs for empirical bayes thresholding. **Journal of Statistical Software**, v. 12, n. 1, p. 1–38, 2005. ISSN 1548-7660. Disponível em: <<https://www.jstatsoft.org/index.php/jss/article/view/v012i08>>.

JOHNSTONE, I. M.; SILVERMAN, B. W. Empirical bayes selection of wavelet thresholds. **The Annals of Statistics**, v. 33, n. 4, p. 1700–1752, 2005. ISSN 0090-5364. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1214/009053605000000345>>.

KIM, S.; IN, F. The relationship between stock returns and inflation: new evidence from wavelet analysis. **Journal of Empirical Finance**, v. 12, n. 3, p. 435–444, 2005. Disponível em: <<http://EconPapers.repec.org/RePEc:eee:empfin:v:12:y:2005:i:3:p:435-444>>.

LEE, B. S. Stock returns and inflation revisited: An evaluation of the inflation illusion hypothesis. **Journal of Banking Finance**, v. 34, n. 6, p. 1257–1273, 2010. Disponível em: <<http://EconPapers.repec.org/RePEc:eee:jbfina:v:34:y:2010:i:6:p:1257-1273>>.

LUNDBERG, C. **Multiresolution Regression**. [S.l.], 2015. Disponível em: <https://editorialexpress.com/cgi-bin/conference/download.cgi?db_name=EAAESEM2016paper_id=192>.

MANKIW, N. G.; REIS, R. Imperfect Information and Aggregate Supply. In: FRIEDMAN, B. M.; WOODFORD, M. (Ed.). **Handbook of Monetary Economics**. Elsevier, 2010, (Handbook of Monetary Economics, v. 3). cap. 5, p. 183–229. Disponível em: <<https://ideas.repec.org/h/eee/monchp/3-05.html>>.

MITRA, S.; MAHESWARI, V.; MITRA, A. A wavelet filtering based estimation of output gap. **Applied Mathematics and Computation**, v. 218, n. 7, p. 3710 – 3722, 2011. ISSN 0096-3003. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300311011799>>.

MODIGLIANI; COHN, R. A. Inflation, rational valuation, and the market. **Financial Analysts Journal**, v. 35, n. 2, p. 24–44, 1979.

NASON, G. **Wavelet Methods in Statistics with R**. 1. ed. [S.l.]: Springer Publishing Company, Incorporated, 2008. ISBN 0387759603, 9780387759609.

NELSON, C. Inflation and rates of return on common stocks. **Journal of Finance**, v. 31, n. 2, p. 471–83, 1976. Disponível em: <<http://EconPapers.repec.org/RePEc:bla:jfinan:v:31:y:1976:i:2:p:471-83>>.

NUNES, M. S.; JR, N. C. A. d. C.; MEURER, R. A relação entre o mercado de ações e as variáveis macroeconômicas: uma análise econômica para o Brasil. **Revista Brasileira de Economia**, scielo, v. 59, p. 585 – 607, 12 2005. ISSN 0034-7140. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttextpid=S0034-71402005000400004nrm=iso>.

PERCIVAL, D. B.; WALDEN, A. T. **Wavelet methods for time series analysis**. [S.l.]: Cambridge Univ. Press, 2000. ISBN 0521640687 0521685087 9780521640688 9780521685085.

PHILLIPS, A. W. The relation between unemployment and the rate of change of money wage rates in the united kingdom. **Economica**, v. 25, n. 100, p. 283-299, 1958.

PIMENTEL, E.; SILVA, J. Decomposição de ondaletas, análise de volatilidade e correlação para índices financeiros. **Estudos Econômicos (São Paulo)**, v. 41, n. 2, p. 441–462, 2011. ISSN 1980-5357. Disponível em: <<http://www.revistas.usp.br/ee/article/view/36049>>.

PIMENTEL, E. A. A wavelets-based analysis of the phillips curve hypothesis for the Brazilian economy, 1980-2011. **Economia Aplicada**, scielo, v. 17, p. 90 – 114, 03 2013. ISSN 1413-8050. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttextpid=S1413-80502013000100005nrm=iso>.

POLANCO-MARTÍNEZ, J. M.; ABADIE, L. M. Analyzing crude oil spot price dynamics versus long term future prices: A wavelet analysis approach. **Energies**, v. 9, n. 12, 2016. ISSN 1996-1073. Disponível em: <<http://www.mdpi.com/1996-1073/9/12/1089>>.

ROESCH, A.; SCHMIDBAUER, H. **WaveletComp: Computational Wavelet Analysis**. [S.l.], 2014. R package version 1.0. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=WaveletComp>>.

SILVERMAN, B. W. **EbayesThresh: Empirical Bayes Thresholding and Related Methods**. [S.l.], 2012. R package version 1.3.2. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=EbayesThresh>>.

TERRA, P. R. S. Inflação e retorno do mercado acionário em países desenvolvidos e emergentes. **Revista de Administração Contemporânea**, scielo, v. 10, p. 133 – 158, 09 2006. ISSN 1415-6555. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttextpid=S1415-65552006000300008nrm=iso>.

TIWARI, A. K.; OROS, C.; ALBULESCU, C. T. Revisiting the inflation–output gap relationship for France using a wavelet transform approach. **Economic Modelling**, v. 37, p. 464 – 475, 2014. ISSN 0264-9993. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0264999313005427>>.

TORRENCE, C.; COMPO, G. P. A practical guide to wavelet analysis. **Bulletin of the American Meteorological Society**, v. 79, n. 1, p. 61–78, 1998. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1175/1520-0477\(1998\)079<0061:APGTWA>2.0.CO;2](http://dx.doi.org/10.1175/1520-0477(1998)079<0061:APGTWA>2.0.CO;2)>.

WHITCHER, B. **waveslim: Basic wavelet routines for one-, two- and three-dimensional signal processing**. [S.l.], 2015. R package version 1.7.5. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=waveslim>>.

APÊNDICE A – Transformada Discreta

O tratamento formal da transformada *wavelets* discreta pode ser visto em Percival e Walden (2000), Gençay et al. (2002) e Nason (2008), que são referências comumente citadas em trabalhos nessa área. A implementação do método ocorreu por meio dos pacotes `wmtsa` e `waveslim`, da plataforma `R`, desenvolvidos, respectivamente, por Constantine e Percival (2016) e Whitcher (2015).

Os coeficientes *wavelets* $\tilde{d}_{j,t}$ e de escala $\tilde{s}_{j,t}$ da MODWT no nível j e no índice t são, respectivamente, definidos por:

$$\tilde{d}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}_l \tilde{s}_{j-1, t-2^{j-1} l \bmod N}, \quad (5)$$

$$\tilde{s}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{g}_l \tilde{s}_{j-1, t-2^{j-1} l \bmod N}. \quad (6)$$

Para uma série qualquer $X_0, X_1 \dots X_{N-1}$, a operação $X_{l \bmod N}$ aumenta a dimensão da série de modo circular, por exemplo, $X_{-1} = X_{N-1}$, $X_{-2} = X_{N-2}$, $X_N = X_0$, $X_{N+1} = X_1$, etc. Por definição, $\tilde{s}_{0,t} = X_0, X_1 \dots X_{N-1}$, com $t = 0, 1 \dots N-1$. A variável L corresponde à dimensão dos filtros g e h . No caso do filtro *wavelet* LA(8), $L = 8$.

A variância não enviesada é calculada da seguinte forma:

$$\hat{\nu}_X^2(\lambda_j) = \frac{1}{M_j} \sum_{t=L_j-1}^{N-1} \tilde{d}_{j,t}^2, \quad (7)$$

onde $\lambda_j = 2^{j-1}$, $L_j = (2^j - 1)(L - 1) + 1$ e $M_j = N - L_j + 1$. A variável M_j controla os coeficientes de borda gerados no processo de extensão circular da série.

Considerando $Q_n(p)$ como o p X100 ponto percentual de uma distribuição qui-quadrado com n graus de liberdade, o intervalo de confiança da variância, aproximado de $100(1 - 2p)\%$, é dado por:

$$\left[\frac{n\hat{\nu}_X^2(\lambda_j)}{Q_n(1-p)}, \frac{n\hat{\nu}_X^2(\lambda_j)}{Q_n(p)} \right]. \quad (8)$$

Supondo duas séries temporais X e Y , um estimador não enviesado da correlação *wavelet* na escala λ_j , obtido via MODWT, é calculado como:

$$\hat{\rho}_{XY}(\lambda_j) = \frac{cov(\tilde{d}_{j,t}^X, \tilde{d}_{j,t}^Y)}{\sqrt{(\hat{\nu}_X^2(\lambda_j))(\hat{\nu}_Y^2(\lambda_j))}}, \quad (9)$$

onde,

$$cov(\tilde{d}_{j,t}^X, \tilde{d}_{j,t}^Y) = \hat{\gamma}_{XY}(\lambda_j) = \frac{1}{M_j} \sum_{t=L_j-1}^{N-1} \tilde{d}_{j,t}^X \tilde{d}_{j,t}^Y. \quad (10)$$

Finalmente, a correlação cruzada entre X e Y na escala λ_j e defasagem v é dada por:

$$\hat{\rho}_{XY,v}(\lambda_j) = \frac{\hat{\gamma}_{XY,v}(\lambda_j)}{\sqrt{(\hat{\nu}_X^2(\lambda_j))(\hat{\nu}_Y^2(\lambda_j))}}. \quad (11)$$

APÊNDICE B – Transformada Contínua

O tratamento formal da transformada *wavelet* contínua pode ser visto em, por exemplo, Percival e Walden (2000). A implementação do método ocorreu por meio do pacote WaveletComp, da plataforma R, desenvolvido por Roesch e Schmidbauer (2014). A apresentação a seguir é baseada em Torrence e Compo (1998), Aguiar e Soares (2011) e Roesch e Schmidbauer (2014).

Nesse artigo empregou-se a função *wavelet*-mãe de Morlet, com frequência angular igual a 6, o que permite interpretar a escala como o inverso da frequência, definida por:

$$\psi(t) = \pi^{-1/4} e^{6it} e^{-t^2/2}. \quad (12)$$

Dado ψ , a transformada contínua de uma série temporal $x(t)$ é definida como a convolução da série com um conjunto de funções *wavelets* filhas, geradas a partir da função *wavelet* mãe pela translação no tempo (τ) e mudança na escala (s):

$$W_x(\tau, s) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \bar{\psi} \left(\frac{t - \tau}{s} \right) dt, \quad (13)$$

com $\bar{\psi}$ denotando o conjugado complexo e $\frac{1}{\sqrt{|s|}}$ correspondendo a uma constante de normalização, que iguala a energia das ondaletas filhas e mãe, garantindo que tenham variância unitária.

A transformada *wavelet* da função base de Morlet decompõem e descreve a série no domínio da frequência, possibilitando a análise em diversas escalas de frequência e de tempo.

Uma medida da distribuição da variância no plano tempo-frequência pode ser obtida do quadrado da amplitude de um componente periódico da série temporal, interpretado como o espectro de energia *wavelet* em um local específico, cuja definição é:

$$WPS_x(\tau, s) = \frac{1}{s} |W_x(\tau, s)|^2. \quad (14)$$

Como a base Morlet tem valor complexo, a transformada da série também é complexa, o que permite escrever $W_x(\tau, s)$ na forma polar, cuja fase é função da

parte imaginária (\Im) e real (\Re):

$$\phi_x(\tau, s) = \tan^{-1} \left(\frac{\Im(W_x(\tau, s))}{\Re(W_x(\tau, s))} \right). \quad (15)$$

A transformada coerência em ondaletas entre duas séries temporais é definida como a razão entre o espectro cruzado e o produto dos espectros individuais:

$$R_{xy}^2 = \frac{|S(W_{xy}(\tau, s))|^2}{S(WPS_x(\tau, s))S(WPS_y(\tau, s))}, \quad (16)$$

onde a transformada cruzada *wavelet* (W_{xy}) é dada por:

$$W_{xy}(\tau, s) = \frac{1}{s} W_x(\tau, s) \overline{W_y(\tau, s)}, \quad (17)$$

e S é um operador de suavização no tempo (τ) e escala (s).

A diferença de fase é definida como:

$$\phi_{x,y}(\tau, s) = \tan^{-1} \left(\frac{\Im(W_{xy}(\tau, s))}{\Re(W_{xy}(\tau, s))} \right). \quad (18)$$