



BANCO CENTRAL DO BRASIL

Trabalhos para Discussão

182

**Avaliação de Opções Americanas com Barreiras
Monitoradas de Forma Discreta**

Giuliano Carrozza Uzêda Iorio de Souza e Carlos Patrício Samanez
Abril, 2009

ISSN 1519-1028
CGC 00.038.166/0001-05

Trabalhos para Discussão	Brasília	n° 182	abr	2009	p. 1-41
--------------------------	----------	--------	-----	------	---------

Trabalhos para Discussão

Editado pelo Departamento de Estudos e Pesquisas (Depep) – *E-mail*: workingpaper@bcb.gov.br

Editor: Benjamin Miranda Tabak – *E-mail*: benjamin.tabak@bcb.gov.br

Assistente Editorial: Jane Sofia Moita – *E-mail*: jane.sofia@bcb.gov.br

Chefe do Depep: Carlos Hamilton Vasconcelos Araújo – *E-mail*: carlos.araujo@bcb.gov.br

Todos os Trabalhos para Discussão do Banco Central do Brasil são avaliados em processo de *double blind referee*.

Reprodução permitida somente se a fonte for citada como: Trabalhos para Discussão nº 182.

Autorizado por Mário Mesquita, Diretor de Política Econômica.

Controle Geral de Publicações

Banco Central do Brasil

Secre/Surel/Dimep

SBS – Quadra 3 – Bloco B – Edifício-Sede – 1º andar

Caixa Postal 8.670

70074-900 Brasília – DF

Telefones: (61) 3414-3710 e 3414-3567

Fax: (61) 3414-3626

E-mail: editor@bcb.gov.br

As opiniões expressas neste trabalho são exclusivamente do(s) autor(es) e não refletem, necessariamente, a visão do Banco Central do Brasil.

Ainda que este artigo represente trabalho preliminar, citação da fonte é requerida mesmo quando reproduzido parcialmente.

The views expressed in this work are those of the authors and do not necessarily reflect those of the Banco Central or its members.

Although these Working Papers often represent preliminary work, citation of source is required when used or reproduced.

Controle Geral de Publicações

Banco Central do Brasil

Secre/Surel/Dimep

SBS – Quadra 3 – Bloco B – Edifício-Sede – 1º Andar

Caixa Postal 8.670

70074-900 Brasília – DF

Telefones: (61) 3414-3710 e 3414-3567

Fax: (61) 3414-3626

Email: editor@bcb.gov.br

Avaliação de Opções Americanas com Barreiras Monitoradas de Forma Discreta

Giuliano Carrozza Uzêda Iorio de Souza^{*}
Carlos Patrício Samanez^{**}

Resumo

Este Trabalho para Discussão não deve ser citado como representando as opiniões do Banco Central do Brasil. As opiniões expressas neste trabalho são exclusivamente do(s) autor(es) e não refletem, necessariamente, a visão do Banco Central do Brasil.

O presente trabalho considera a avaliação de opções americanas com barreiras monitoradas de forma discreta. Desenvolveu-se um modelo que consiste em uma adaptação do método de Grant, Vora e Weeks (GVW) (1997), permitindo incorporar-se as barreiras. As simulações realizadas foram obtidas a partir do método Quase-Monte Carlo Híbrido. Adicionalmente, o método de Bisseção foi empregado para definição das curvas de gatilho das opções. Os resultados encontrados nas aplicações realizadas foram comparados com aqueles obtidos a partir do Adaptive Mesh Model, de Ahn et al (1999). Em complemento, avaliou-se a sensibilidade do preço das opções frente a mudanças nos parâmetros de entrada, confirmando a aderência dos valores gerados por cada aproximação. Note-se que, ao contrário do modelo lattice adotado como parâmetro de comparação, a adaptação do modelo GVW possui a vantagem de permitir diretamente a aplicação às opções com monitoramento contínuo da barreira.

Palavras-chave: Derivativos, Opções, Métodos Numéricos.

Classificação JEL: G, G1, G13.

^{*} Departamento de Operações Bancárias e de Sistema de Pagamentos, Banco Central do Brasil. E-mail: giuliano.iorio@bcb.gov.br

^{**} Departamento de Engenharia Industrial, PUC-Rio; Faculdade de Economia, UERJ. E-mail: cps@rdc.puc-rio.br.

1. Introdução

As opções com barreira são negociadas no mercado de balcão desde os últimos anos 60 e tornaram-se populares especialmente em função do seu custo reduzido em relação à opção *vanilla* equivalente. A primeira solução analítica para o apreamento desses derivativos foi proposta por Merton (1973) e considerava a avaliação de opções de compra européias com barreira de monitoramento contínuo do tipo *down-and-out*. Não obstante, constatou-se que a fórmula encontrada também seria válida para avaliação de opções de compra americanas, já que o exercício antecipado não seria justificável.

Reiner e Rubinstein (1991) desenvolveram fórmulas fechadas para avaliação de opções de compra e de venda européias com os quatro tipos de barreira mais conhecidos: *down-and-out*, *up-and-out*, *down-and-in* e *up-and-in*. Considerando ainda o desenvolvimento de fórmulas fechadas para avaliação de opções européias com barreiras de monitoramento contínuo, pode-se citar os trabalhos de Kunitomo e Ikeda (1992), Rich (1994), Haug (1997), entre outros.¹

Ressalte-se que, mesmo considerando as opções européias, pode haver diferenças substanciais nos preços entre opções com barreira de monitoramento contínuo e aquelas com monitoramento discreto, ainda que se considere o monitoramento discreto com base diária, conforme demonstrado por Chance (1994), Flesaker (1992), Kat e Verdonk (1995). Kat e Heynen (1996) chegaram a mesma conclusão, desenvolvendo fórmulas fechadas para avaliação de opções européias com barreira discreta em que a barreira muda ao longo da vida útil da opção (*stepped barrier options*).

Heynen e Kat (1994) e Armstrong (2001) derivaram uma solução fechada para um caso intermediário entre as opções com monitoramento contínuo e aquelas com monitoramento discreto, as opções européias com barreira válida somente em uma janela de tempo específica (*window barrier option* ou *partial barrier option*). Já

¹ Existe uma relação de paridade entre as opções européias de compra com barreira do tipo “in” e do tipo “out”. Ao se combinar uma opção com barreira do tipo “in” com uma opção com barreira do tipo “out” com mesmo preço de exercício e vencimento, o fluxo de caixa resultante será equivalente ao de uma opção *vanilla*, assim: $C = C_{in} + C_{out}$. Manter essas duas opções na carteira garante que uma e somente uma das opções irá gerar *payoff* não nulo no vencimento. Destaque-se que a paridade é válida somente para opções européias sem rebate.

Broadie e Glasserman (1997) propuseram uma correção de um modelo para apreçamento de opções européias com barreira contínua para estimar o preço de opções com barreira discreta em que, dependendo da frequência do monitoramento, a barreira é deslocada de forma a ajustar o modelo para o caso discreto. Entretanto, os resultados obtidos indicam que a aproximação não é adequada quando o preço de barreira é definido em valor próximo ao do ativo subjacente.

Assim, conclui-se que os preços obtidos por soluções fechadas para opções com monitoramento contínuo não se estende para as opções com monitoramento discreto. Adicionalmente, constata-se que quando as barreiras recebem monitoramento discreto torna-se mais difícil a obtenção de uma solução fechada ou mesmo a solução do problema por meio de métodos numéricos.

Como usual, mesmo no caso das opções com barreira de monitoramento contínuo, as opções americanas eliminam a possibilidade de solução por meio de fórmula fechada.² Por conseguinte, em paralelo ao desenvolvimento de soluções numéricas, aplicadas somente ao caso europeu, diversos métodos foram desenvolvidos para avaliação desses derivativos, seja no caso de monitoramento contínuo ou discreto. Nessa linha, desde o trabalho clássico de Cox *et al* (1979), entre as adaptações de modelos *lattice* destinadas à avaliação de vários tipos de opção, inclui-se aquelas direcionadas à avaliação de opções com barreira. Por exemplo, a Câmara de Derivativos da BM&F Bovespa utiliza o modelo Binomial para cálculo dos limites máximos de preços aceitos para negociação de opções flexíveis³ – Monteiro *et al* (2002). Não

² Haug e Partners (2000) desenvolveram uma solução para avaliação de opções americanas com barreira baseada em soluções fechadas aplicadas à avaliação de opções *vanilla* americanas. A proposta apresentada pelos autores é baseada no princípio da reflexão, que assume que o número de trajetórias partindo do preço do ativo subjacente em uma determinada data (S_t) que assume valores superiores ao preço de exercício da opção (X) maior do que o preço de barreira B ($B < S_t$) antes do vencimento do derivativo é igual ao número trajetórias a partir de um ativo que possui o valor de B^2/S_t na data inicial.

³ As opções com barreira são denominadas na Câmara de Derivativos da BM&F Bovespa como Opções Flexíveis e podem ser referenciadas em Ibovespa, IBRX-50, Índice de taxa de juro spot ou taxa de câmbio de Reais por Dólar dos Estados Unidos. O número de contratos de opções flexíveis negociado entre janeiro e agosto de 2008 foi de 768.721. O volume financeiro negociado no mês de agosto foi de R\$4.952.903 mil, verificando-se 355.440 contratos em aberto. Algumas das características dessas opções são: (i) Monitoramento contínuo da barreira; (ii) As partes podem estabelecer um preço que limite o preço para exercício da opção, que será o preço a vista máximo para efeito de exercício da opção; (iii) Possibilidade de se estabelecer um preço de rebate; (iv) As partes podem estabelecer a data de pagamento do prêmio de rebate, no caso de opção de *knock-out*, como a data de extinção da opção ou o primeiro dia útil posterior e, no caso de opção de *knock-in*, como qualquer dia útil entre a data de acionamento da barreira, inclusive, e o primeiro dia útil posterior à data de vencimento, inclusive.

obstante, estes modelos, baseados em árvores binomiais ou trinomiais, podem apresentar problemas de convergência quando aplicados à avaliação destes derivativos, o que ocorre em função da barreira assumida na árvore, definida sobre os nós discretizados, ser normalmente diferente da barreira real presente no derivativo.

Procurando solucionar esse problema, Bolye e Lau (1994) propuseram um método *lattice* que força os preços do ativo subjacente nos nós da árvore a coincidirem com os preços de barreira. Entretanto, a metodologia empregada pode tornar a árvore impraticável em função do número elevado de discretizações. Seguindo a linha de Bolye e Lau (1994), vários outros autores desenvolveram adaptações do método *lattice* para avaliação de opções com barreira - Derman *et al* (1995), Ritchken (1995) e Cheuk e Vorst (1995) -, porém, o problema de convergência persistia, principalmente nos casos de avaliação de opções com monitoramento discreto da barreira.

Na esteira dos modelos *lattice* aplicados à avaliação de opções com barreira, Figlewski e Gao (1999) introduziram o Adaptive Mesh Model (AMM), que se destaca pela flexibilidade e melhora na eficiência das árvores trinomiais aplicadas à avaliação de opções européias ou americanas com barreira de monitoramento contínuo. Já no caso das opções européias ou americanas com barreira de monitoramento discreto, Ahn *et al* (1999) foram os primeiros a propor uma solução baseada no Adaptive Mesh Model, apesar da dificuldade ainda maior para avaliação destes derivativos por meio dos métodos *lattice*.

O presente artigo considera a avaliação de opções americanas com barreiras monitoradas de forma discreta - o caso mais complexo - e está dividido em seis seções. Após a presente introdução, o item 2 está focado em detalhar aspectos gerais inerentes às opções com barreira, descrevendo suas características e particularidades. Após esta etapa, os dois modelos utilizados para avaliação das opções em questão são apresentados nos itens 3 e 4. Assim, no item 3 é apresentado o Adaptive Mesh Model, de Ahn *et al* (1999), utilizado como parâmetro de comparação do modelo apresentado no item 4, baseado no método de Grant, Vora e Weeks (GVW) (1997). Cabe destacar que, como este foi desenvolvido originalmente para avaliação de opções americanas *vanilla* e opções Asiáticas, tornou-se necessária uma adaptação do mesmo de forma a considerar a presença de barreiras discretas, o que representa a principal contribuição desse trabalho.

No item 5 são apresentadas as aplicações realizadas dos dois modelos, onde foram consideradas opções americanas com barreiras discretas do tipo *knock-out-and-down*, comparando-se os resultados encontrados por cada metodologia empregada.

Finalmente, o item 6 é dedicado aos comentários e conclusões finais.

2. Opções com barreira

As opções com barreira podem variar em função de diversas características, mas o conceito geral é que o direito de exercício depende do preço do ativo subjacente ter atingido determinado valor (barreira) em algum momento durante a vida do contrato. Estas podem ser agrupadas em três classes: opções com barreira simples, *knock-in* e *knock-out*.

As opções com barreira simples podem ser classificadas em dois tipos: *cap*, para opções de compra, e *floor*, para opções de venda. A barreira do tipo *cap* representa um limite de preço superior para o ativo subjacente, caso em que o *payoff* da opção de compra é limitado superiormente pela diferença entre o preço de barreira e o preço do ativo subjacente. Já a barreira do tipo *floor* representa um limite de preço inferior para o ativo subjacente, caso em que o *payoff* da opção de venda é limitado superiormente pela diferença entre o preço de exercício da opção e o preço de barreira. Assim, o *payoff* dessas opções é representado pelas equações (1) e (2):

$$\text{Opção de Compra } C_{cap} = \max[0, \min(S - X; B_{cap} - X)] \quad (1)$$

$$\text{Opção de Venda } F_{floor} = \max[0, \min(X - S; X - B_{floor})] \quad (2)$$

Onde:

S: o preço do ativo subjacente

X: preço de exercício da opção

B_{cap} : Preço de barreira do tipo *cap*

B_{floor} : Preço de barreira do tipo *floor*

Nas opções *knock-in*, o direito de exercício passa a existir somente se o preço do ativo subjacente atingir o preço da barreira antes da data de vencimento. Estas podem

ser classificadas como *knock-in-and-down* - quando o preço do ativo subjacente na emissão é superior ao preço de barreira - ou como *knock-in-and-up* - quando o preço do ativo subjacente na emissão é inferior ao preço de barreira. Já nas opções *knock-out* ocorre justamente o contrário, ou seja, o direito de exercício deixa de existir se o preço do ativo subjacente atingir o preço da barreira antes da data de vencimento. Estas podem ser classificadas como *knock-out-and-down* - quando o preço do ativo subjacente na emissão é superior ao preço de barreira - ou como *knock-out-and-up* - quando o preço do ativo subjacente na emissão é inferior ao preço de barreira.

Existe ainda a possibilidade de incluir um prêmio de compensação ou rebate R , que é pago ao titular ou na data em que a barreira é atingida ou na data de vencimento caso a barreira não seja atingida durante a vida útil da opção. Assim, o *payoff* dessas opções é representado pelas equações (3) a (6):

- *knock-in-and-down*

$$\text{Opção de Compra} \begin{cases} \max(0; S - X), \text{ se } S \leq B \text{ antes do vencimento} \\ R, \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Opção de Venda} \begin{cases} \max(0; X - S), \text{ se } S \leq B \text{ antes do vencimento} \\ R, \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (4)$$

- *knock-in-and-up*

$$\text{Opção de Compra} \begin{cases} \max(0; S - X), \text{ se } S \geq B \text{ antes do vencimento} \\ R, \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{Opção de Venda} \begin{cases} \max(0; X - S), \text{ se } S \geq B \text{ antes do vencimento} \\ R, \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (6)$$

- *knock-out-and-down*

$$\text{Opção de Compra} \begin{cases} \max(0; S - X), \text{ se } S > B \text{ antes do vencimento} \\ R, \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{Opção de Venda} \begin{cases} \max(0; X - S), \text{ se } S > B \text{ antes do vencimento} \\ R, \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (8)$$

- *knock-out-and-up*

$$\text{Opção de Compra} \begin{cases} \max(0; S - X), \text{ se } S < B \text{ antes do vencimento} \\ R, \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{Opção de Venda} \begin{cases} \max(0; X - S), \text{ se } S < B \text{ antes do vencimento} \\ R, \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (10)$$

Destaque-se ainda as opções em que se considera a inclusão simultânea de uma barreira simples e de uma barreira do tipo *knock-in* ou *knock-out* – *double barrier option*. Por exemplo, na hipótese de se utilizar uma barreira do tipo *knock-out* e uma barreira simples, o valor da barreira simples deverá ser inferior ao da *knock-out*, quando a opção for *knock-out-and-up*, e superior, quando for *knock-out-and-down*.

As opções com barreira podem ainda ser classificadas como de barreira com monitoramento discreto - *discrete barrier option* - ou de barreira com monitoramento contínuo - *continuous barrier option*, sendo estas as mais comuns. Nas opções com barreira discreta a barreira só está ativa para uma parte da vida útil da opção. Incluem-se as opções em que a barreira só é válida na data de vencimento da opção (*at-expiry barrier options*), as opções com barreiras ativas somente durante intervalos de tempo específicos (*window barrier options* – durante as janelas de tempo o monitoramento pode ser contínuo ou somente em algumas datas específicas) e as opções com barreiras que mudam de valor durante a vida útil da opção (*stepped barrier options*).

Há ainda as opções em que o rompimento da barreira só é considerado se mantido por um certo intervalo de tempo (*parisian barrier options*) ou ainda aquelas em que se considera o rompimento parcial da barreira dependendo da intensidade do

rompimento da barreira (*soft barrier options*). Há ainda as opções em que as barreiras referenciam um ativo subjacente diferente daquele referenciado no *payoff* da opção (*outside barriers*).

3. Adaptive Mesh Model para avaliação de opções americanas com barreira de monitoramento discreto

Figlewski e Gao (1999) introduziram o Adaptive Mesh Model (AMM), um modelo flexível que aumenta consideravelmente a eficiência dos modelos *lattice* trinomiais aplicado à avaliação de opções européias ou americanas com barreira de monitoramento contínuo. De acordo com essa metodologia, a árvore básica (*coarse mesh*) é usada em todos os instantes de tempo discretizados, mas um maior número de discretizações (*fine mesh*) é construído nas áreas em que os cálculos são mais críticos, ou seja, onde o preço do ativo subjacente é próximo ao preço de barreira.

Ahn *et al* (1999) propuseram uma solução baseada no Adaptive Mesh Model para o caso das opções européias ou americanas com barreira de monitoramento discreto. Nesse caso, as áreas mais críticas em que um maior número de discretizações é construído (*fine mesh*) são aquelas em que a barreira discreta é válida e o preço do ativo subjacente é próximo ao preço de barreira. Como o caso de monitoramento discreto da barreira é mais complexo, a descrição a seguir trata justamente do modelo proposto por Ahn *et al* (1999).

No modelo de Figlewski e Gao (1999) e no modelo de Ahn *et al* (1999) é importante que a malha fina seja isomórfica, o que possibilita que malhas ainda mais finas sejam adicionadas a partir do mesmo procedimento aplicado para construção da primeira árvore fina. Assim, torna-se possível melhorar a resolução em determinada área da árvore sem a necessidade de aumento de discretização em todos os pontos da mesma.

3.1 Construção da árvore trinomial básica (*coarse mesh*)

Para construção da árvore trinomial básica, assume-se que o preço do ativo subjacente (S) segue o seguinte processo de difusão:

$$d \ln S = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dZ \quad (11)$$

Onde r é a taxa de juros livre de risco, σ é a volatilidade do ativo subjacente e dZ é um processo de Wiener.

Convém definir $X = \ln S$ e o *drift* $\alpha = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)$. Assim:

$$dX = \alpha dt + \sigma dZ \quad (12)$$

Esse processo é discretizado e aproximado pelo seguinte processo trinomial:

$$X_{t+k} - X_t = \left\{ \begin{array}{l} u = \alpha k + \sigma h, \text{ com probabilidade : } p_u = \frac{k}{2h^2} \\ m = \alpha k, \text{ com probabilidade : } p_m = 1 - \frac{k}{h^2} \\ d = \alpha k - \sigma h, \text{ com probabilidade : } p_d = \frac{k}{2h^2} \end{array} \right\} \quad (13)$$

Onde k representa a discretização do tempo e h a discretização do preço do ativo subjacente. As probabilidades de que haja um movimento de alta, intermediário e de baixa são p_u , p_m e p_d , respectivamente.

Assim, como em qualquer método *lattice*, o valor da opção para um determinado instante de tempo (t) e valor do ativo subjacente (X), $V(X,t)$, é computado a partir dos valores obtidos nos nós do período seguinte.

$$V(X,t) = \exp(-rk) [p_u V(X + \alpha k + \sigma h, t+k) + p_m V(X + \alpha k, t+k) + p_d V(X + \alpha k - \sigma h, t+k)] \quad (14)$$

O modelo funciona para qualquer valor positivo de h e k . Ao definir-se $h = \sigma(\sqrt{3k})$, então $p_u = p_d = 1/6$ e $p_m = 2/3$, para o qual o processo discretizado por meio do modelo trinomial possui os mesmos primeiros cinco momentos do processo contínuo lognormal representado na equação 12 e que se deseja aproximar.

Além das datas em que a barreira é válida, pode-se melhorar significativamente o modelo ao se considerar que mesmo uma opção com a complexidade das opções com barreira podem ser avaliadas como se fossem opções europeias no instante de tempo

imediatamente anterior ao vencimento. De acordo com Figlewski e Gao (1999), usando-se uma fórmula fechada para opções européias elimina o erro de não-linearidade produzido pela discretização da árvore ao redor do preço de exercício da opção na data de vencimento. Uma alternativa para eliminar o erro de não-linearidade é adotar na data de vencimento da opção o mesmo procedimento de discretizações adicionais utilizado nos pontos em que a barreira é válida. Este foi o procedimento utilizado na aplicação do método realizada no presente trabalho, ou seja, optou-se pela construção de um maior número de discretizações (*fine mesh*) para avaliação da opção em sua data de vencimento, conforme proposto por Figlewski e Gao (1999).

A seguir são descritas as duas etapas para construção da árvore fina. Na primeira constroem-se as discretizações adicionais entre a data anterior à barreira e a data da barreira, aplicando-se ramificações de árvores trinomiais. Na segunda definem-se as discretizações adicionais entre a data da barreira e a data seguinte à data da barreira, quando são aplicadas tanto ramificações trinomiais quanto quadrimomiais.

3.2 Construção da árvore fina entre a data anterior à barreira discreta e a data da mesma

Considerando que a árvore trinomial básica (*coarse mesh*) tenha N períodos, a discretização do tempo é $k = T/N$, onde T representa o prazo da opção. Para construção da árvore fina, os nós da árvore passam a ser definidos com base em mudanças no preço do ativo subjacente equivalentes a $1/2$ das mudanças no preço na árvore anterior (considerando a primeira árvore fina – modelo AMM1, a árvore anterior é a árvore básica). Adicionalmente, de forma a reduzir a mudança no preço à metade, mantendo-se a mesma relação entre o tempo e o tamanho da mudança no preço do ativo subjacente, o intervalo de tempo deve ser reduzido para $1/4$ do tamanho do intervalo de tempo da árvore anterior. Assim, se M é o nível da árvore, sendo a árvore básica aquela em que M é igual a zero, então $h^M = h/2^M$ e $k^M = k/4^M$.

Por conseguinte, para reduzir a mudança no preço à metade, o número de intervalos de tempo será quadruplicado, e o número total de nós na árvore será 16 vezes maior entre a data anterior a cada barreira discreta e a data da mesma. Finalmente, para construção de cada árvore fina, basta substituir os valores $h_M = h/2^M$ e $k_M = k/4^M$ na equação 13.

3.3 Construção da árvore fina entre a data anterior à barreira discreta e a data da mesma

O próximo passo é conectar a árvore fina à árvore anterior (no caso do AMM1, à árvore original, para o AMM2, à árvore fina do AMM1, e assim por diante). Assim, considerando a árvore anterior, o procedimento começa com a divisão, em dois intervalos, do período que se inicia na data da barreira discreta e termina na data posterior à mesma, sendo o primeiro intervalo de tamanho igual a $k/4$ e o segundo de tamanho $3k/4$. Assim sendo, o primeiro subperíodo da árvore fina equivale a $1/4$ do intervalo de tempo da árvore anterior, e o segundo período equivale a $3/4$.

Após a construção dos nós no primeiro subperíodo a partir da árvore trinomial ($h_M = h/2^M$ e $k_M = k/4^M$), chega-se a dois tipos de nós no instante da barreira. Para aqueles em que o preço do ativo subjacente coincide com o preço da árvore do AMM anterior, aplica-se a árvore trinomial novamente, substituindo-se a mudança no preço do ativo subjacente por h e o intervalo de tempo por $3k/4$. Isso leva às probabilidades $p_u = p_d = 1/8$ e $p_m = 3/4$. Para os nós em que o preço do ativo subjacente situa-se entre os preços da árvore do AMM anterior, aplica-se a árvore quadrinomial para definição dos valores da opção. Assumindo-se $k' = 3k/4$ e adotando-se o mesmo procedimento apresentado para construção da árvore trinomial, pode-se definir os três primeiros momentos da árvore quadrinomial como sendo iguais aos da distribuição lognormal que se deseja aproximar. Encontrando-se a média, a volatilidade, a curtose e forçando-se às probabilidades a somarem um, chega-se então a quatro equações com quatro incógnitas. A solução resulta do problema resulta em uma árvore binomial, com apenas os dois nós intermediários da árvore quadrinomial, conforme apresentado na fórmula 15.

$$X_{t+1} - X_{t+1/4} = \left. \begin{array}{l} uu = \alpha k' + 3\sigma h / 2, \text{ com probabilidade : } p_{uu} = 0 \\ u = \alpha k' + \sigma h / 2, \text{ com probabilidade : } p_u = 1/2 \\ d = \alpha k' - \sigma h / 2, \text{ com probabilidade : } p_d = 1/2 \\ dd = \alpha k' - 3\sigma h / 2, \text{ com probabilidade : } p_{dd} = 0 \end{array} \right\} \quad (15)$$

A estrutura isomórfica da árvore fina permite que se desenvolva cada árvore fina seguinte a partir do mesmo procedimento descrito anteriormente. Por exemplo, para o modelo AMM2, a mudança no preço e no intervalo de tempo da árvore fina final passa a ser $h_2 = h/4$ e $k_M = k/16$ nos intervalos iniciais, e $h_2 = h/4$ e $k' = 3k/64$ no último intervalo

após a barreira. A figura 1 representa a árvore final considerando a construção de duas árvores finas (AMM2).

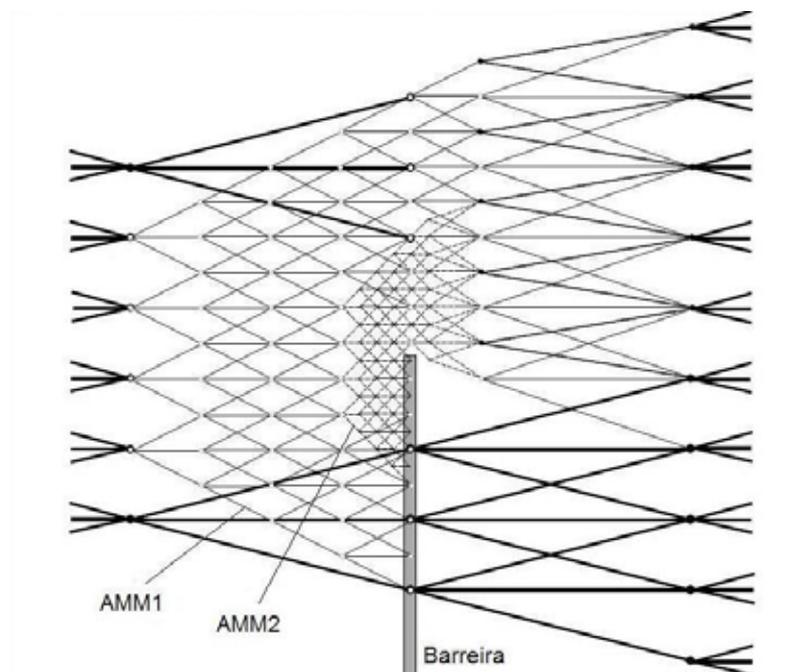


Figura 1 – Árvores finas (*fine mesh*) para o AMM2

4. O Método de Grant, Vora e Weeks (GVW)

4.1. Introdução

O modelo de Grant, Vora e Weeks (GVW) (1997) é dividido basicamente em duas etapas principais. Na primeira, a partir de simulações realizadas recursivamente, determina-se a curva de gatilho, que consiste nos preços críticos do ativo subjacente em cada instante de tempo discretizado. Esses preços representam aqueles nos quais o proprietário da opção permanece indiferente entre o exercício imediato ou a postergação do mesmo até ao menos a data seguinte, quando nova decisão deverá ser tomada.

De forma a identificar o preço de exercício crítico para cada instante de tempo, inicia-se um processo de otimização a partir de um primeiro conjunto de trajetórias simuladas para o ativo subjacente, realizadas a partir do instante anterior ao vencimento. Após estas primeiras simulações, são realizadas então novas simulações de período a período, sempre caminhando em direção à data anterior, até que se chegue à data seguinte a de emissão. Assim, as simulações iniciais definem o preço crítico do ativo

subjacente no instante anterior ao vencimento da opção, T-1. As simulações seguintes, realizadas a parti de T-2, geram como resultado o preço crítico do ativo subjacente no instante T-2. Nas simulações realizadas em seqüência, define-se o preço crítico do ativo subjacente no instante T-3, e assim por diante.

Uma vez que o preço crítico para todos os instantes de tempo tenha sido identificado, a etapa seguinte do modelo consiste então na realização de novas simulações a partir do instante inicial (o número de simulação não é necessariamente o mesmo que o das simulações anteriores), e o valor da opção americana será a média aritmética dos fluxos de caixa obtidos em cada trajetória descontados para a data de emissão, de maneira análoga à estimação do valor de uma opção européia, mas levando-se em conta que, em qualquer data, será ótimo exercer a opção sempre que o preço do ativo subjacente for superior ao preço crítico obtido na etapa anterior do modelo.

O procedimento para determinação da curva de gatilho e apreçamento de uma opção de compra americana a partir do modelo GVW pode ser resumido através das seguintes etapas:

1º etapa - Divide-se o período até o vencimento da opção em um número finito de intervalos, adotando-se como condição terminal o preço do ativo subjacente (S) igual ao preço de exercício da opção no vencimento da opção (T), X_T .

2º etapa - Para o instante imediatamente anterior ao vencimento da opção ($T - 1$), adota-se como sendo o preço inicial do ativo subjacente um valor igual ou próximo ao preço de exercício da opção, ou seja, $S_{T-1}^* = S_T^* = X$. Iniciam-se então as simulações chegando-se a diversos valores para a opção no instante T. O valor final da opção em $T - 1$ é estimado pela média desses valores descontados por um período. Se o respectivo ponto atender à condição de indiferença entre exercer a opção ou mantê-la viva, ou seja, se atender à equação $S_{T-1}^* - X = e^{-r}E_{T-1}[C_T(S_T^*) / S_{T-1} = S_{T-1}^*]$, ter-se-á o valor crítico do ativo objeto no instante T-1. Caso a condição anterior não seja atendida, deve-se realizar um acréscimo no valor de S_T^* e reiniciar o processo de busca⁴:

$$S^{**}_{T-1} = S_{T-1}^* + \varepsilon$$

⁴ Para opção de venda, deve-se realizar um decréscimo no valor de S_T^* .

Onde: $E_{T-1}[C_T(S_T^*) / S_{T-1} = S_{T-1}^*]$ = valor esperado em $T-1$ do valor da opção de compra dado o preço crítico do ativo subjacente em $T-1$, S_{T-1}^* .

3º etapa – Encontrado o valor crítico do ativo objeto em $T-1$, S_{T-1}^* , deve-se então continuar o processo de busca de preços críticos repetido o 2º passo recursivamente até o instante inicial, ou seja, refazendo-o desde o instante $T-2$ até a data de emissão da opção. Para o instante $T-2$, a opção deverá ser avaliada em cada momento posterior ao tempo em questão, ou seja, nos instantes $T-1$ e T , respeitando sempre o processo decisório de exercer a opção quando o preço simulado do ativo ultrapassar a curva de gatilho. Após iniciar-se as simulações em $T-2$, partindo de um preço crítico em $T-2$ igual àquele encontrado para $T-1$ ($S_{T-2}^* = S_{T-1}^*$), o valor final da opção em $T-2$ será a média dos valores encontrados da opção em cada simulação descontados para a data $T-2$. Assim, se o respectivo ponto atender à condição de indiferença entre exercer a opção ou mantê-la viva, ter-se-á o valor crítico do ativo objeto no instante $T-2$. Caso a condição anterior não seja atendida, deve-se realizar um acréscimo no valor de S_{T-2}^* e reiniciar o processo de busca: $S^{**}_{T-2} = S_{T-2}^* + \varepsilon$.

4º etapa - Após a construção da curva de gatilho a partir dos três passos anteriores, o passo seguinte consiste em realizar novas simulações a partir da data de emissão da opção, considerando o preço inicial do ativo objeto, S_0 . O preço final da opção será o valor médio de cada trajetória trazido a valor presente.

4.2. Definição das trajetórias de preço do ativo subjacente

Admitindo-se que o preço do ativo subjacente segue o Movimento Geométrico Browniano, pode-se demonstrar que o modelo discreto apropriado de evolução do logaritmo neperiano do preço da ação subjacente é:

$$S_i = S_{i-1} e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}} \quad (16)$$

Onde S_i representa o preço do ativo subjacente no instante i , μ é a expectativa de retorno do investimento no ativo subjacente, σ é o desvio padrão do retorno

logarítmico do ativo subjacentes, e ε é uma variável aleatória que segue uma distribuição normal padronizada.

No mundo neutro ao risco, a expectativa de retorno do investimento na ação subjacente já está embutida no seu preço, de forma que não se torna necessário conhecê-la. Desta forma, antes de iniciar as simulações, deve-se substituir μ pela taxa de juros livre de risco na equação (16). Assim, a partir da simulação de valores para ε , são definidas as possíveis trajetórias a serem percorridos pelo valor do ativo subjacente ao longo do tempo.

4.3. Avaliação de opções americanas de compra *knock-out-and-down* com monitoramento discreto da barreira através do Método de Grant, Vora e Weeks (GVW)

Para avaliação de opções americanas de compra *knock-out-and-down* com monitoramento discreto da barreira, o modelo GVW deve sofrer algumas modificações. Na primeira alteração, realizada na etapa de construção da curva de gatilho (etapa um do modelo), deve haver a incorporação da barreira do tipo *knock-out-and-down* nas datas em que a mesma é válida. Esse procedimento implica em valores distintos para a nova curva de gatilho em relação àqueles que seriam obtidos para a curva de gatilho da opção *vanilla* equivalente, já que nas simulações em que o preço do ativo subjacente atingir o preço de barreira em uma data em que a mesma é válida terão valor distinto daquele que seria observado caso a barreira fosse inexistente. Cabe observar que nas aplicações do modelo realizadas no presente trabalho, o valor da opção em cada trajetória simulada que atinja o preço de barreira será igual ao valor presente do rebate⁵.

Outra alteração necessária no modelo GVW refere-se às simulações realizadas a partir da data inicial, após a curva de gatilho já ter sido determinada. Da mesma forma que na etapa de construção da curva de gatilho, as barreiras também deverão estar presentes nessas últimas simulações realizadas. Assim, além da curva de preços críticos do ativo subjacente, representando aqueles preços que, caso atingidos, gerariam o exercício imediato da opção, há ainda um vetor de preços críticos do ativo subjacente (caso o monitoramento da barreira seja contínuo, haveria uma nova curva - barreira móvel - ou uma linha reta - barreira fixa), representado pelos preços de barreira nas datas em que a mesma é válida. Assim, para que cada trajetória percorra a vida útil

da opção até atingir o vencimento, torna-se necessário que os preços gerados em cada instante de tempo situem-se dentro de um túnel de preços cujos limites superiores e inferiores são representados pela curva de gatilho e pelos preços de barreira nas datas em que a mesma é válida, respectivamente. Caso o limite inferior do túnel de preços seja atingido, o valor da opção na trajetória será o valor presente do rebate. Já no caso do limite superior ser atingido, o valor da opção na trajetória será o valor presente do exercício da opção na data em que o limite foi extrapolado.

4.4. Técnicas de aceleração de convergência

Sabe-se que o valor de alguns parâmetros utilizados no modelo GVW podem exercer influencia direta na precisão dos resultados. Por exemplo, dependendo da maneira com que se realiza a estimação dos preços críticos para o ativo subjacente, pode-se incorrer em erros significativos para o valor da opção. Uma primeira medida para redução desses erros é adotar-se maior discretização para as mudanças no preço do ativo subjacente, ou ainda aumentar-se o número de simulações utilizadas na estimativa de cada preço crítico.

Outro parâmetro que pode determinar a precisão do modelo é o número de datas de exercício antecipado (número de preços críticos em cada curva de gatilho), que no limite será representado pelo número de instantes de tempo discretizados. Quando este número é restrito, o modelo também pode apresentar valores tendenciosos para a opção. Portanto, torna-se crítico utilizar um número suficientemente grande de datas de exercício para que o resultado não seja tendencioso.

A seguir, são descritas duas técnicas de aceleração de convergência aplicadas no modelo GVW desenvolvido no presente trabalho. O objetivo da aplicação das mesmas é melhorar a precisão dos resultados, assim como otimizar o tempo computacional a partir principalmente da redução do número de simulações necessárias para determinação da curva de gatilho.

⁵ Consideraram-se opções em que o investidor recebe o valor de rebate assim que o preço do ativo subjacente iguala-se ao preço de barreira em uma data em que a mesma é válida.

4.4.1. Seqüências Quase-aleatórias

Enquanto a Simulação de Monte Carlo (SMC) gera uma seqüência de números pseudo-aleatórios, a Simulação de Quase-Monte Carlo (SQMC) gera uma seqüência de números quase-aleatórios, em que as amostras são selecionadas de modo a preencherem de forma uniforme todo o domínio da simulação, evitando agrupamentos e vazios. Em função da maior uniformidade das seqüências obtidas, estas são também denominadas seqüências de baixa discrepância.

Dependendo do ativo analisado, o uso de SQMC pode trazer ganhos em eficiência e precisão em relação à SMC. Todavia, um problema conhecido das seqüências de baixa discrepância, citado por Frota (2003) e Nascimento (2005), é que as mesmas perdem a uniformidade conforme se aumenta o número de dimensões do problema. Por conseguinte, caso não seja trabalhada adequadamente, pode-se concluir que a SQMC é inadequada para a avaliação de opções americanas, onde o número de dimensões é dado pelo número de datas de exercício.

O modelo Quase-Monte Carlo (QMC) híbrido surge como alternativa à SMC e à SQMC tradicional para avaliação de problemas com altas dimensões, mantendo as mesmas propriedades de baixa discrepância das seqüências quase-aleatórias aplicadas a problemas de poucas dimensões. O algoritmo do modelo QMC híbrido permuta aleatoriamente uma seqüência básica de números quase-aleatórios, de modo a gerar novas seqüências independentes para cada dimensão do problema. Assim, para montar uma matriz de números quase-aleatórios de tamanho $M \times N$, onde M representa o número de simulações e N o número de dimensões, o primeiro passo é gerar uma seqüência de números quase-aleatórios de tamanho N – van der Corput, Halton e Sobol são as mais conhecidas nas aplicações em finanças -, que representará a primeira coluna da matriz $M \times N$. Para elaborar as demais colunas da matriz, basta permutar os valores da primeira coluna, ou seja, todas as colunas possuirão os mesmos elementos, mas organizados em ordem aleatória⁶.

Assim, como o objetivo do modelo desenvolvido no presente trabalho é a avaliação de opções *down-and-out* do tipo americana, representando um problema de

⁶ Para se obter independência ao longo de cada trajetória (linha da matriz $M \times N$), deve-se adotar M maior do que N , já que esta medida facilita a redução da correlação que pode existir em seqüências quase-aleatórias. De qualquer forma, mesmo para $N = D$, a seqüência pode ser suficientemente independente na prática.

altas dimensões, optou-se por adotar o modelo QMC híbrido com seqüências de Halton tomadas como base para construção das matrizes de números quase-aleatórios. Ressalte-se que, após gerar a matriz $M \times N$, que possui distribuição uniforme, o passo seguinte é obter a seqüência de números com distribuição Normal padrão, necessária para definir as trajetórias de preços do ativo subjacente, conforme a equação (16). Esta nova seqüência é obtida a partir da inversa da função cumulada de probabilidade da distribuição normal, que converte cada número da matriz de distribuição uniforme em um número da nova matriz de seqüências com distribuição Normal padrão.

4.4.2. Bisseção

Conforme visto, no método de GVW, o valor crítico no instante $T - \Delta t$ pode ser definido como o valor que iguala os termos da seguinte equação:

$$S_{T-\Delta t}^* - X = e^{-r\Delta t} E_{T-\Delta t}[C_T(S_T^*) \mid S_{T-\Delta t} = S_{T-\Delta t}^*] \quad (17)$$

Considerando a lógica de programação, encontrar o valor crítico $S_{T-\Delta t}^*$ significa encontrar o valor de $S_{T-\Delta t}^*$ que anula a equação 17, ou seja, encontrar o zero da seguinte função:

$$f(g) = g - X - e^{-r\Delta t} E_{T-\Delta t}[C_T(S_T^*) \mid S_{T-\Delta t} = g] \quad (18)$$

Para isso, primeiramente estima-se $e^{-r\Delta t} E_{T-\Delta t}[C_T(S_T^*) \mid S_{T-\Delta t} = g]$ através de simulações de trajetórias para o ativo subjacente partindo de g . Em seguida, utiliza-se um método numérico de aceleração de convergência, como o bisseção, para encontrar a raiz de $f(g)$. Esse procedimento foi utilizado então no modelo apresentado neste trabalho em substituição à 2ª etapa do modelo GVW original descrita no item 4.

Assim, considerando um intervalo $[a,b]$, em que $f(a) \times f(b) < 0$, ou seja, onde existe pelo menos um zero da função f , o método da bisseção consiste em subdividir, sucessivamente, este intervalo à metade, considerando o subintervalo onde se verifica a condição de mudança de sinal dos extremos. Este processo pode ser repetido até o intervalo ser tão pequeno quanto o desejado. Assim, geralmente será necessário escolher

uma tolerância ou intervalo no qual a raiz de $f(g)$ estará confinada e, possivelmente, definir um número máximo de iterações para o algoritmo de busca.

O algoritmo descrito a seguir, baseado no método de bisseção, pode melhorar sensivelmente a velocidade de convergência do método GVW. Deve haver cuidado especial na escolha dos valores iniciais da curva de gatilho de modo a não ultrapassarem os valores críticos das respectivas datas de exercício antecipado. Escolhidos valores iniciais adequados, que por sua vez dependem da escolha do intervalo de busca para o preço crítico do ativo subjacente, tem-se:

- 1º ponto de busca: $(S_{T-t}^*)_1 = \frac{S_T^* + (S_{T-1}^*)_{\max}}{2}$

Intervalo de busca a que o preço crítico fica restrito: $[S_T^*, (S_{T-1}^*)_{\max}]$

- 2º ponto de busca:

Se $S_{T-t}^* - X < e^{-r} E_{T-t}[C_T(S_T^*)]$:

Então, o 2º ponto de busca será: $(S_{T-t}^*)_2 = \frac{S_T^* + (S_{T-1}^*)_1}{2}$

Intervalo de busca a que o preço crítico fica restrito: $[S_T^*, (S_{T-1}^*)_1]$

Se $S_{T-t}^* - X > e^{-r} E_{T-t}[C_T(S_T^*)]$:

Então, o 2º ponto de busca será: $(S_{T-t}^*)_2 = \frac{(S_{T-1}^*)_1 + (S_{T-1}^*)_{\max}}{2}$

Intervalo de busca a que o preço crítico fica restrito: $[(S_{T-1}^*)_1, (S_{T-1}^*)_{\max}]$

Novos pontos de busca são encontrados até que o intervalo de busca para o preço crítico do ativo subjacente seja menor que a tolerância adotada, quando então o mesmo procedimento é adotado para encontrar o preço crítico do ativo subjacente na data imediatamente anterior.

5. Aplicação dos modelos

Para avaliação do modelo desenvolvido, considerou-se sua aplicação para estimativa de preços de opções americanas de compra knock-out-and-down com

monitoramento discreto da barreira. Utilizou-se um número de datas de exercício sempre equivalente ao número de intervalos de tempo discretizados. Além disso, foram adotados, em cada caso, ao menos 10 vezes mais caminhos (n_1) para o cálculo dos valores críticos do ativo subjacente do que o número de datas discretizadas. Finalmente, o número de simulações definido para o cálculo do valor final da opção (n_2) foi de 50.000.

O julgamento da acurácia do modelo foi então realizado a partir da comparação dos prêmios estimados com aqueles obtidos por meio da aplicação do método Adaptive Mesh Model, de Ahn *et al* (1999), considerando a construção de oito árvores finas para cada data de barreira (AMM8). Em relação às opções estudadas, foram avaliados diversos cenários, onde se alternou o número de datas em que a barreira é monitorada (m) e o valor da barreira. Assim, como o modelo desenvolvido é baseado em simulações, para cada cenário foram gerados trinta valores para a opção, obtendo-se a média e o desvio-padrão dos mesmos.

A tabela 1 apresenta os resultados da aplicação do método. Além dos parâmetros das simulações descritos anteriormente, os demais parâmetros utilizados foram: preço do ativo subjacente na data inicial: $S=100$; preço de exercício da opção: $X=102$; preço de rebate: $R=5$, pago no momento em que a barreira é atingida; desvio-padrão diário do retorno logaritmo do ativo subjacente: $\sigma=1,89329\%$; taxa de juros livre de risco anual: $r=13,81143\%$; e, prazo da opção: $T=61$ dias.

m	Barreira	GVW	Desvio-Padrão	AMM8	Erro Relativo (%) = (GVW – AMM8)/ AMM8
1	92	6,7881	0,0213	6,8787	-1,317%
	94	7,0252	0,0238	7,1063	-1,141%
	96	7,2341	0,0218	7,3188	-1,157%
	98	7,4315	0,0215	7,5127	-1,081%
3	92	7,2869	0,0309	7,3745	-1,188%
	94	7,5171	0,0201	7,5912	-0,976%
	96	7,6594	0,0322	7,7055	-0,598%
	98	7,6599	0,0231	7,7234	-0,822%
6	92	7,4961	0,0238	7,5866	-1,193%
	94	7,6578	0,0269	7,7544	-1,246%
	96	7,7102	0,0273	7,7722	-0,798%
	98	7,5653	0,0288	7,6032	-0,498%

Tabela 1 - Avaliação de opções americanas de compra knock-out-and-down com monitoramento discreto da barreira

Pode-se notar que há aderência entre os preços estimados pelos dois modelos, embora o modelo GVW tenha gerado valores ligeiramente abaixo daqueles determinados pelo modelo AMM8. O erro relativo absoluto médio foi de 1%. Por exemplo, considerando apenas uma data de monitoramento de barreira e o preço de barreira igual a 92, o modelo GVW gerou um preço para o derivativo 1,317% inferior ao preço gerado pelo modelo AMM8. Esse foi o maior erro relativo verificado nos exemplos analisados. Já o desvio-padrão ficou entre 0,00201 e 0,0322, representando, respectivamente, 0,267% e 0,420% da média das 30 simulações utilizadas como estimativa para o preço do derivativo.

Há ainda um fato interessante a se destacar na tabela 1. Considerando-se as opções com barreiras monitoradas em apenas uma data ($m=1$) e aquelas com barreiras monitoradas em 3 datas ($m=3$), o preço estimado aumenta na medida em que o preço de barreira é maior. Porém, o mesmo não ocorre com as opções com barreiras monitoradas em 6 datas. Neste caso, embora a opção com o menor preço estimado seja aquela que possui o menor preço de barreira, a que possui o maior preço estimado não é a de maior preço de barreira, mas a que possui preço de barreira igual a 96.

Embora possa parecer estranho em um primeiro momento, é natural que a mudança no preço da opção nem sempre ocorra na mesma direção da mudança no preço de barreira. Esse fato ocorre, pois, além do preço de barreira, o impacto no preço da opção depende ainda de outros fatores, como o preço de rebate, as datas em que a barreira é monitorada, entre outros. Por exemplo, tomando-se por base trajetórias geradas por um modelo de simulação, a presença de uma barreira em uma data qualquer aumentará o valor de uma opção *vanilla* equivalente somente na situação em que capturar na barreira trajetórias cujo valor presente dos *payoffs* que seriam gerados ao se desconsiderar a barreira (VP_{payoff}) sejam inferiores ao valor presente do rebate gerado na data de barreira (VP_{Rebate}). Como a diferença entre VP_{payoff} e VP_{Rebate} é afetada por diversos fatores, conclui-se que a adoção de mais uma data de barreira ou a alteração do preço de barreira pode influenciar o valor final da opção de diversas maneiras.

No exemplo analisado, considere-se uma barreira no valor de 98 monitorada somente na data imediatamente anterior ao vencimento da opção. Essa barreira capturaria todas as trajetórias simuladas com preços do ativo subjacente naquela data iguais ou inferiores ao preço de barreira. Como o preço de exercício no exemplo

analisado é de 102 e na data de barreira as opções estariam a apenas um passo do vencimento, essas trajetórias teriam alto potencial de atingirem o vencimento deixando a opção fora-do-dinheiro, o que significa que dificilmente gerariam *payoffs* positivos para a opção de compra sem a barreira. Fica claro então que a implementação da barreira nessa data teria como impacto transformar um conjunto de trajetórias com valor presente nulo em trajetórias com valor equivalente ao valor presente do preço de rebate, gerando impacto positivo sobre o preço da opção. Por outro lado, se fossem alterados a data de monitoramento da barreira – por exemplo, estabelecendo-a logo após a emissão da opção –, o preço de barreira ou ainda o preço de rebate – por exemplo, para zero –, obviamente o efeito poderia ser bem diferente.

5.1. Análise de Sensibilidade

De forma a verificar a aderência entre os resultados apresentados pelos dois modelos, é avaliado a seguir o comportamento do preço das opções com 3 datas de monitoramento da barreira (analisadas no item 5) frente às seguintes mudanças em determinados parâmetros: (i) redução de 100% no preço de rebate; (ii) aumento de 100% no preço de rebate; (iii) redução de 50% na volatilidade diária do ativo subjacente; e (iv) aumento de 50% na volatilidade diária do ativo subjacente. Os resultados são apresentados na tabela 2.

Conforme esperado, o preço da opção muda no mesmo sentido das alterações realizadas sobre o preço de rebate. Por exemplo, considerando os modelos GVW e AMM8 aplicados para avaliação da opção com preço de barreira 98, a redução de 100% no preço de rebate gerou uma queda de 37,78% e de 37,83% em relação ao preço da opção original, respectivamente. Já a elevação de 100% no preço de rebate gerou um aumento de 37,79% e de 37,83% no preço da opção, respectivamente. Note-se, portanto, que há um efeito simétrico das alterações no preço de rebate sobre o preço da opção. Verifica-se também que as opções com maior preço de barreira são mais sensíveis às alterações no preço de rebate. Esse fato era esperado, já que, neste caso, há uma maior probabilidade da barreira ser atingida do que na situação em que a barreira é definida em um patamar mais baixo.

As opções também apresentaram sensibilidade às mudanças realizadas na volatilidade do ativo subjacente. Este parâmetro gera dois efeitos sobre o preço do

derivativo. Além de aumentar a chance da opção entrar no dinheiro, torna também mais provável que a barreira seja atingida, gerando para o detentor da opção o recebimento do preço de rebate que, nos exemplos analisados, representam *payoffs* com impacto positivo sobre o preço da opção.

Finalmente, verifica-se na última coluna da tabela 2 que os dois modelos utilizados apresentaram resultados semelhantes em relação às mudanças aplicadas nas variáveis, sendo a maior diferença entre os resultados apresentados pelo modelo GVW e pelo modelo AMM8 de -1,534%. O erro relativo absoluto médio foi de 0,99%.

Alteração	Barreira	GVW	Diferença (%) em relação à opção original	AMM8	Diferença (%) em relação à opção original	Erro Relativo (%) = (GVW – AMM8)/AMM8
Redução de 100% no rebate	92	5,6861	-21,97%	5,7747	-21,69%	-1,534%
	98	4,7659	-37,78%	4,8018	-37,83%	-0,748%
Aumento de 100% no rebate	92	8,8726	21,76%	8,9743	+21,69%	-1,133%
	98	10,555	37,79%	10,6450	+37,83%	-0,846%
Redução de 50% na volatilidade	92	3,4197	-53,07%	3,4384	-53,37%	-0,544%
	98	4,9123	-35,87%	4,9206	-36,29%	-0,169%
Aumento de 50% na volatilidade	92	10,239	40,51%	10,4245	+41,36%	-1,780%
	98	9,9067	29,33%	10,0257	+29,81%	-1,187%

Tabela 2 - Análise de Sensibilidade - opções americanas de compra *knock-out-and-down* com monitoramento discreto da barreira (3 datas de monitoramento da barreira)

Considerando as opções com preço de barreira igual a 92 apresentadas na tabela 2, a figura 1 apresenta as curvas de gatilho, representando os preços do ativo subjacentes que, caso atingidos, gerariam o exercício imediato da opção. Ressalte-se que, conforme metodologia descrita no item 4, os preços de barreira são levados em conta para construção das mesmas. Além disso, da mesma forma que as curvas de gatilho, caso o preço do ativo subjacente atinja a barreira em uma data em que a mesma é válida, o fluxo resultante da opção passa a ser o preço de rebate.

Por exemplo, pode-se notar na figura 1 que a redução de 50% na volatilidade gerou um deslocamento para cima na curva de gatilho. Por outro lado, a redução de 50% na volatilidade gerou um deslocamento para baixo na curva de gatilho. Observa-se ainda que, ao se considerar as variações no preço de rebate, as curvas de gatilho ficaram bem próximas uma da outra, situando-se abaixo da curva de gatilho da opção original. Outro ponto a se destacar é que todas as curvas de gatilho convergem para o mesmo valor, terminando com valor igual a 102 na data de vencimento. Esse comportamento

era esperado, já que esse valor representa na verdade o preço de exercício da opção. Por fim, cabe destacar que não existe relação entre a posição das curvas de gatilho e o preço final do derivativo, já que as simulações realizadas após a construção das curvas levam em consideração parâmetros diferentes em cada caso.

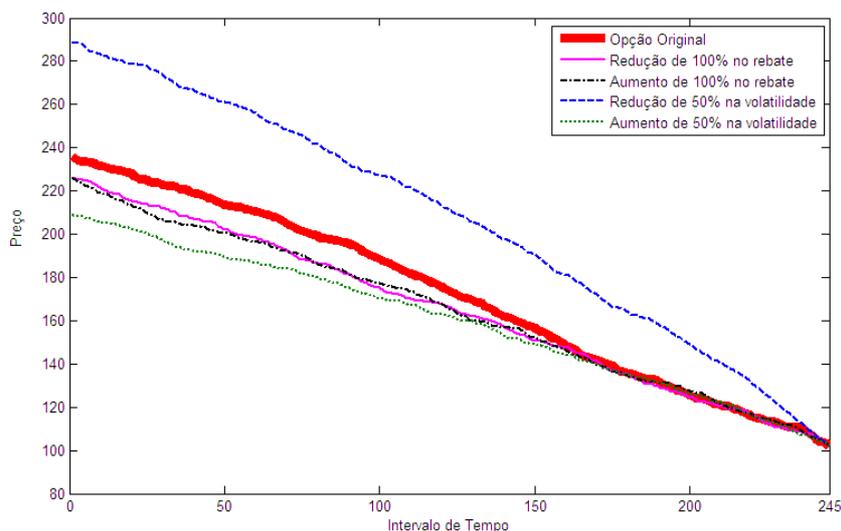


Figura 1 – Curvas de gatilho (preço de barreira igual a 92)

6. Conclusões

As opções com barreira são contratos que envolvem uma certa complexidade, dentre outras coisas em função do seu *payoff* depender da trajetória seguida pelo ativo subjacente. Não obstante, representam alternativas interessantes para cobertura de posições em diversos ativos, normalmente a custos inferiores daqueles que seriam gerados a partir de posições em opções *vanilla*. Desse modo, a principal motivação do presente trabalho foi desenvolver uma nova ferramenta para avaliação adequada desses derivativos - em especial na situação em que as barreiras são monitoradas de forma discreta -, o que se torna imprescindível para melhor compreensão e uso adequado dos mesmos.

A adaptação do Método de Grant, Vora e Weeks (GVW) (1997) desenvolvida apresentou boa aderência com os resultados obtidos a partir da aplicação do modelo Adaptive Mesh Model, de Ahn et al (1999). Destaque-se que, embora as aplicações realizadas neste trabalho tenham se concentrado nas opções *knock-out-and-down*, aquele modelo pode ser ajustado para avaliação de outros tipos de opção, como as opções *knock-out-and-up*, *knock-in-and-down*, *knock-in-and-up*, *caps*, *floors*, ou ainda as opções com barreira de monitoramento contínuo, como as opções flexíveis negociadas na BM&F Bovespa. Por outro lado, destaque-se

que o modelo Adaptive Mesh Model exige uma modelagem diferenciada para avaliação das opções com barreira de monitoramento contínuo, conforme proposto por Figlewski e Gao (1999). Além disso, para avaliação das opções *knock-in*, o modelo Adaptive Mesh Model exige a construção de duas árvores (além de suas respectivas malhas finas), podendo ocasionar um aumento representativo nos custos computacionais (enquanto a primeira árvore define o preço de uma opção *vanilla*, a segunda se baseia na primeira para definir o preço da opção *knock-in*).

Assim, acredita-se que a adaptação do modelo GVW aqui apresentada possa ser utilizado por participantes do mercado interessados em negociar esses títulos, permitindo, além de encontrar seus preços justos, a realização de análises de sensibilidade do valor dos mesmos frente a mudanças nos parâmetros de entrada dos modelos.

Adicionalmente, quanto a possíveis aprimoramentos ou extensões deste trabalho, uma idéia interessante seria, com base nas curvas de gatilho que já são definidas no modelo GVW, calcular-se as probabilidades de exercício da opção, ou ainda obter-se as probabilidades de que a barreira seja ou não atingida ao longo de sua vida útil, o que representaria uma informação importante para os negociadores destes produtos. Uma abordagem semelhante para cálculo de probabilidades de exercício de opções com base em Simulações de Monte Carlo pode ser encontrada em Iorio, Samanez e Raposo (2006).

Bibliografia:

AHN, Dong-Hyun. FIGLEWSKI, Stephen. GAO, Bin. Pricing Discrete Barrier Options with an Adaptive Mesh Model. Abril de 1999. Disponível em SSRN: <http://ssrn.com/abstract=162450>

ARMSTRONG, G. F. Valuation formulae for window barrier options. *Applied Mathematical Finance*, Volume 8, Dezembro de 2001 , p. 197-208

BATISTA, F. R. S. Avaliação de Opções de Investimento em Projetos de Exploração e Produção de Petróleo por Meio da Fronteira de Exercício Ótimo da Opção. 124f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Industrial). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2002.

BOYLE, P. LAU, S.H. Bumping Against the Barrier with the Binomial Method. *Journal of Derivatives*, 1, 1994, p. 6-14.

BROADIE, M., GLASSERMAN, P., KOU, S. G. Connecting discrete and continuous path-dependent options, *Finance and Stochastics*, 3, 1999, p. 55-82.

CHANCE, D. M. The pricing and hedging of limited exercise caps and spreads. *J. Financial Res.* 17, 1995, p. 561-584.

CHEUK, T.H.F., VORST, T.C.F. Complex Barrier Options. *Journal of Derivatives*, 4, 1995, p. 8-22.

COX, J. C., S. A. ROSS, e M. RUBINSTEIN. Option Pricing: A Simplified Approach, *Journal of Financial Economics*, 7, 1979, p. 229-263.

DERMAN, E., KANI, I., ERGENER, D., BARDHAN, I. Enhanced numerical methods for options with barriers. Goldman Sachs Quantitative Strategies Research Notes, 1995.

FLESAKER, B. The design and valuation of capped stock index options. Working paper, Department of Finance, University of Illinois, Champaign, IL, 1992.

FIGLEWSKI, S., E GAO, B. The Adaptive Mesh Model: A New Approach to Efficient Option Pricing. *Journal of Financial Economics*, 53, 1999, p. 313-351.

FROTA, A. E. F. Avaliação de Opções Americanas Tradicionais e Complexas. 143 f. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Industrial, PUC-Rio, 2003.

GRANT, D.; VORA, G.; WEEKS, D. Path-Dependent Options: Extending the Monte Carlo Simulation Approach. *Management Science*, v. 43, n. 11, 1997, p. 1589-1602.

HAUG, E. G. *The Complete Guide to Option Pricing Formulas*. McGraw-Hill, New York, 1997.

HEYNEN, R. C., KAT, H. M. Crossing barriers. *Risk* 7, 1994a, p. 46-49. Correção em: *Risk* 8, 1995, 18. Republicado como: Over the Rainbow: Developments in Exotic

Options and Complex Swaps (Editado por R. Jarrow), p. 179-182. RISK/FCMC, London.

HEYNEN, R. C., KAT, H. M. Partial barrier options. *Journal of Financial Engineering*, 3, 1994b, p. 253-274.

HORFELT, P., (2003) Extension of the corrected barrier approximation by Broadie, Glasserman, and Kou. *Finance and Stochastics*, 7, p. 231-243.

IORIO, G. ; SAMANEZ, C. P. ; RAPOSO, G. S. Avaliação do POP da Bovespa por Métodos Numéricos. *Anais do XIV SIMPEP (Simpósio de Engenharia de Produção)*, 2007, São Paulo.

JOY, C.; BOYLE, P.P.; TAN, K.S. Quasi-Monte Carlo Methods in Numerical Finance. *Management Science*, vol. 42, nº 6, Junho de 1996, p. 926-938.

KAT, H. M. e HEYNEN, R. C. Discrete Partial Barrier Options with a Moving Barrier, *Journal of Financial Engineering*, Vol. 5, nº 3, Setembro de 1996.

KAT, H. M., VERDONK, L. Tree surgery. *Risk* 8, Fevereiro de 1995, p. 53-56

KUNITOMO, N., IKEDA, M. Pricing options with curved boundaries. *Math. Finance* 2, 1992, p. 275-298.

MERTON, R.. Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management, Science* 4, 1973, 141-183.

MONTEIRO, V. R., NETO, C. A. V., PANECZKO, R. T., OLIVEIRA, A. de Salles. Limites de Preço Mínimo e Máximo para Registro de Opções Flexíveis Caps, Floors, Knock-ins, Knock-outs e Rebates. IBMEC São Paulo. Fanancelab Working Paper - FLWP, 03, 2002.

NASCIMENTO, A. F. Avaliação de Investimentos em Tecnologia da Informação: uma Perspectiva de Opções Reais. 151 f. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Industrial, PUC-Rio, 2005.

RICH, D. R. The Mathematical Foudation of Barrier Option-Pricing Theory, *Advances in Futures and Options Research*, 7, 1994, 267 – 311.

RITCHKEN, P. On Pricing Barrier Options. *Journal of Derivatives*, 3, 1995, p. 19-28.

RUBINSTEIN, M., REINER, E. Breaking Down the Barriers, *Risk* 4, September 1991, p. 28-35

STEINER, M., WALLMEIER, M., HAFNER, R. Pricing near the barrier: the case of discrete knock-out options, *Journal of Computational Finance*, 3, 1999, p. 69-90.

Banco Central do Brasil

Trabalhos para Discussão

Os Trabalhos para Discussão podem ser acessados na internet, no formato PDF, no endereço: <http://www.bc.gov.br>

Working Paper Series

Working Papers in PDF format can be downloaded from: <http://www.bc.gov.br>

- | | | |
|-----------|---|----------|
| 1 | Implementing Inflation Targeting in Brazil
<i>Joel Bogdanski, Alexandre Antonio Tombini and Sérgio Ribeiro da Costa Werlang</i> | Jul/2000 |
| 2 | Política Monetária e Supervisão do Sistema Financeiro Nacional no Banco Central do Brasil
<i>Eduardo Lundberg</i> | Jul/2000 |
| | Monetary Policy and Banking Supervision Functions on the Central Bank
<i>Eduardo Lundberg</i> | Jul/2000 |
| 3 | Private Sector Participation: a Theoretical Justification of the Brazilian Position
<i>Sérgio Ribeiro da Costa Werlang</i> | Jul/2000 |
| 4 | An Information Theory Approach to the Aggregation of Log-Linear Models
<i>Pedro H. Albuquerque</i> | Jul/2000 |
| 5 | The Pass-Through from Depreciation to Inflation: a Panel Study
<i>Ilan Goldfajn and Sérgio Ribeiro da Costa Werlang</i> | Jul/2000 |
| 6 | Optimal Interest Rate Rules in Inflation Targeting Frameworks
<i>José Alvaro Rodrigues Neto, Fabio Araújo and Marta Baltar J. Moreira</i> | Jul/2000 |
| 7 | Leading Indicators of Inflation for Brazil
<i>Marcelle Chauvet</i> | Sep/2000 |
| 8 | The Correlation Matrix of the Brazilian Central Bank's Standard Model for Interest Rate Market Risk
<i>José Alvaro Rodrigues Neto</i> | Sep/2000 |
| 9 | Estimating Exchange Market Pressure and Intervention Activity
<i>Emanuel-Werner Kohlscheen</i> | Nov/2000 |
| 10 | Análise do Financiamento Externo a uma Pequena Economia
Aplicação da Teoria do Prêmio Monetário ao Caso Brasileiro: 1991–1998
<i>Carlos Hamilton Vasconcelos Araújo e Renato Galvão Flôres Júnior</i> | Mar/2001 |
| 11 | A Note on the Efficient Estimation of Inflation in Brazil
<i>Michael F. Bryan and Stephen G. Cecchetti</i> | Mar/2001 |
| 12 | A Test of Competition in Brazilian Banking
<i>Márcio I. Nakane</i> | Mar/2001 |

13	Modelos de Previsão de Insolvência Bancária no Brasil <i>Marcio Magalhães Janot</i>	Mar/2001
14	Evaluating Core Inflation Measures for Brazil <i>Francisco Marcos Rodrigues Figueiredo</i>	Mar/2001
15	Is It Worth Tracking Dollar/Real Implied Volatility? <i>Sandro Canesso de Andrade and Benjamin Miranda Tabak</i>	Mar/2001
16	Avaliação das Projeções do Modelo Estrutural do Banco Central do Brasil para a Taxa de Variação do IPCA <i>Sergio Afonso Lago Alves</i>	Mar/2001
	Evaluation of the Central Bank of Brazil Structural Model's Inflation Forecasts in an Inflation Targeting Framework <i>Sergio Afonso Lago Alves</i>	Jul/2001
17	Estimando o Produto Potencial Brasileiro: uma Abordagem de Função de Produção <i>Tito Nícias Teixeira da Silva Filho</i>	Abr/2001
	Estimating Brazilian Potential Output: a Production Function Approach <i>Tito Nícias Teixeira da Silva Filho</i>	Aug/2002
18	A Simple Model for Inflation Targeting in Brazil <i>Paulo Springer de Freitas and Marcelo Kfoury Muinhos</i>	Apr/2001
19	Uncovered Interest Parity with Fundamentals: a Brazilian Exchange Rate Forecast Model <i>Marcelo Kfoury Muinhos, Paulo Springer de Freitas and Fabio Araújo</i>	May/2001
20	Credit Channel without the LM Curve <i>Victorio Y. T. Chu and Márcio I. Nakane</i>	May/2001
21	Os Impactos Econômicos da CPMF: Teoria e Evidência <i>Pedro H. Albuquerque</i>	Jun/2001
22	Decentralized Portfolio Management <i>Paulo Coutinho and Benjamin Miranda Tabak</i>	Jun/2001
23	Os Efeitos da CPMF sobre a Intermediação Financeira <i>Sérgio Mikio Koyama e Márcio I. Nakane</i>	Jul/2001
24	Inflation Targeting in Brazil: Shocks, Backward-Looking Prices, and IMF Conditionality <i>Joel Bogdanski, Paulo Springer de Freitas, Ilan Goldfajn and Alexandre Antonio Tombini</i>	Aug/2001
25	Inflation Targeting in Brazil: Reviewing Two Years of Monetary Policy 1999/00 <i>Pedro Fachada</i>	Aug/2001
26	Inflation Targeting in an Open Financially Integrated Emerging Economy: the Case of Brazil <i>Marcelo Kfoury Muinhos</i>	Aug/2001
27	Complementaridade e Fungibilidade dos Fluxos de Capitais Internacionais <i>Carlos Hamilton Vasconcelos Araújo e Renato Galvão Flôres Júnior</i>	Set/2001

- 28 **Regras Monetárias e Dinâmica Macroeconômica no Brasil: uma Abordagem de Expectativas Racionais** Nov/2001
Marco Antonio Bonomo e Ricardo D. Brito
- 29 **Using a Money Demand Model to Evaluate Monetary Policies in Brazil** Nov/2001
Pedro H. Albuquerque and Solange Gouvêa
- 30 **Testing the Expectations Hypothesis in the Brazilian Term Structure of Interest Rates** Nov/2001
Benjamin Miranda Tabak and Sandro Canesso de Andrade
- 31 **Algumas Considerações sobre a Sazonalidade no IPCA** Nov/2001
Francisco Marcos R. Figueiredo e Roberta Blass Staub
- 32 **Crises Cambiais e Ataques Especulativos no Brasil** Nov/2001
Mauro Costa Miranda
- 33 **Monetary Policy and Inflation in Brazil (1975-2000): a VAR Estimation** Nov/2001
André Minella
- 34 **Constrained Discretion and Collective Action Problems: Reflections on the Resolution of International Financial Crises** Nov/2001
Arminio Fraga and Daniel Luiz Gleizer
- 35 **Uma Definição Operacional de Estabilidade de Preços** Dez/2001
Tito Nícias Teixeira da Silva Filho
- 36 **Can Emerging Markets Float? Should They Inflation Target?** Feb/2002
Barry Eichengreen
- 37 **Monetary Policy in Brazil: Remarks on the Inflation Targeting Regime, Public Debt Management and Open Market Operations** Mar/2002
Luiz Fernando Figueiredo, Pedro Fachada and Sérgio Goldenstein
- 38 **Volatilidade Implícita e Antecipação de Eventos de Stress: um Teste para o Mercado Brasileiro** Mar/2002
Frederico Pechir Gomes
- 39 **Opções sobre Dólar Comercial e Expectativas a Respeito do Comportamento da Taxa de Câmbio** Mar/2002
Paulo Castor de Castro
- 40 **Speculative Attacks on Debts, Dollarization and Optimum Currency Areas** Apr/2002
Aloisio Araujo and Márcia Leon
- 41 **Mudanças de Regime no Câmbio Brasileiro** Jun/2002
Carlos Hamilton V. Araújo e Getúlio B. da Silveira Filho
- 42 **Modelo Estrutural com Setor Externo: Endogenização do Prêmio de Risco e do Câmbio** Jun/2002
Marcelo Kfoury Muinhos, Sérgio Afonso Lago Alves e Gil Riella
- 43 **The Effects of the Brazilian ADRs Program on Domestic Market Efficiency** Jun/2002
Benjamin Miranda Tabak and Eduardo José Araújo Lima

44	Estrutura Competitiva, Produtividade Industrial e Liberação Comercial no Brasil <i>Pedro Cavalcanti Ferreira e Osmani Teixeira de Carvalho Guillén</i>	Jun/2002
45	Optimal Monetary Policy, Gains from Commitment, and Inflation Persistence <i>André Minella</i>	Aug/2002
46	The Determinants of Bank Interest Spread in Brazil <i>Tarsila Segalla Afanasieff, Priscilla Maria Villa Lhacer and Márcio I. Nakane</i>	Aug/2002
47	Indicadores Derivados de Agregados Monetários <i>Fernando de Aquino Fonseca Neto e José Albuquerque Júnior</i>	Set/2002
48	Should Government Smooth Exchange Rate Risk? <i>Ilan Goldfajn and Marcos Antonio Silveira</i>	Sep/2002
49	Desenvolvimento do Sistema Financeiro e Crescimento Econômico no Brasil: Evidências de Causalidade <i>Orlando Carneiro de Matos</i>	Set/2002
50	Macroeconomic Coordination and Inflation Targeting in a Two-Country Model <i>Eui Jung Chang, Marcelo Kfoury Muinhos and Joaúlio Rodolpho Teixeira</i>	Sep/2002
51	Credit Channel with Sovereign Credit Risk: an Empirical Test <i>Victorio Yi Tson Chu</i>	Sep/2002
52	Generalized Hyperbolic Distributions and Brazilian Data <i>José Fajardo and Aquiles Farias</i>	Sep/2002
53	Inflation Targeting in Brazil: Lessons and Challenges <i>André Minella, Paulo Springer de Freitas, Ilan Goldfajn and Marcelo Kfoury Muinhos</i>	Nov/2002
54	Stock Returns and Volatility <i>Benjamin Miranda Tabak and Solange Maria Guerra</i>	Nov/2002
55	Componentes de Curto e Longo Prazo das Taxas de Juros no Brasil <i>Carlos Hamilton Vasconcelos Araújo e Osmani Teixeira de Carvalho de Guillén</i>	Nov/2002
56	Causality and Cointegration in Stock Markets: the Case of Latin America <i>Benjamin Miranda Tabak and Eduardo José Araújo Lima</i>	Dec/2002
57	As Leis de Falência: uma Abordagem Econômica <i>Aloisio Araujo</i>	Dez/2002
58	The Random Walk Hypothesis and the Behavior of Foreign Capital Portfolio Flows: the Brazilian Stock Market Case <i>Benjamin Miranda Tabak</i>	Dec/2002
59	Os Preços Administrados e a Inflação no Brasil <i>Francisco Marcos R. Figueiredo e Thaís Porto Ferreira</i>	Dez/2002
60	Delegated Portfolio Management <i>Paulo Coutinho and Benjamin Miranda Tabak</i>	Dec/2002

- 61 **O Uso de Dados de Alta Frequência na Estimação da Volatilidade e do Valor em Risco para o Ibovespa** Dez/2002
João Maurício de Souza Moreira e Eduardo Facó Lemgruber
- 62 **Taxa de Juros e Concentração Bancária no Brasil** Fev/2003
Eduardo Kiyoshi Tonooka e Sérgio Mikio Koyama
- 63 **Optimal Monetary Rules: the Case of Brazil** Fev/2003
Charles Lima de Almeida, Marco Aurélio Peres, Geraldo da Silva e Souza and Benjamin Miranda Tabak
- 64 **Medium-Size Macroeconomic Model for the Brazilian Economy** Fev/2003
Marcelo Kfoury Muinhos and Sergio Afonso Lago Alves
- 65 **On the Information Content of Oil Future Prices** Fev/2003
Benjamin Miranda Tabak
- 66 **A Taxa de Juros de Equilíbrio: uma Abordagem Múltipla** Fev/2003
Pedro Calhman de Miranda e Marcelo Kfoury Muinhos
- 67 **Avaliação de Métodos de Cálculo de Exigência de Capital para Risco de Mercado de Carteiras de Ações no Brasil** Fev/2003
Gustavo S. Araújo, João Maurício S. Moreira e Ricardo S. Maia Clemente
- 68 **Real Balances in the Utility Function: Evidence for Brazil** Fev/2003
Leonardo Soriano de Alencar and Márcio I. Nakane
- 69 **r-filters: a Hodrick-Prescott Filter Generalization** Fev/2003
Fabio Araújo, Marta Baltar Moreira Areosa and José Alvaro Rodrigues Neto
- 70 **Monetary Policy Surprises and the Brazilian Term Structure of Interest Rates** Fev/2003
Benjamin Miranda Tabak
- 71 **On Shadow-Prices of Banks in Real-Time Gross Settlement Systems** Apr/2003
Rodrigo Penaloza
- 72 **O Prêmio pela Maturidade na Estrutura a Termo das Taxas de Juros Brasileiras** Maio/2003
Ricardo Dias de Oliveira Brito, Angelo J. Mont'Alverne Duarte e Osmani Teixeira de C. Guillen
- 73 **Análise de Componentes Principais de Dados Funcionais – uma Aplicação às Estruturas a Termo de Taxas de Juros** Maio/2003
Getúlio Borges da Silveira e Octavio Bessada
- 74 **Aplicação do Modelo de Black, Derman & Toy à Precificação de Opções Sobre Títulos de Renda Fixa** Maio/2003
Octavio Manuel Bessada Lion, Carlos Alberto Nunes Cosenza e César das Neves
- 75 **Brazil's Financial System: Resilience to Shocks, no Currency Substitution, but Struggling to Promote Growth** Jun/2003
Ilan Goldfajn, Katherine Hennings and Helio Mori

- 76 **Inflation Targeting in Emerging Market Economies** Jun/2003
Arminio Fraga, Ilan Goldfajn and André Minella
- 77 **Inflation Targeting in Brazil: Constructing Credibility under Exchange Rate Volatility** Jul/2003
André Minella, Paulo Springer de Freitas, Ilan Goldfajn and Marcelo Kfoury Muinhos
- 78 **Contornando os Pressupostos de Black & Scholes: Aplicação do Modelo de Precificação de Opções de Duan no Mercado Brasileiro** Out/2003
Gustavo Silva Araújo, Claudio Henrique da Silveira Barbedo, Antonio Carlos Figueiredo, Eduardo Facó Lemgruber
- 79 **Inclusão do Decaimento Temporal na Metodologia Delta-Gama para o Cálculo do VaR de Carteiras Compradas em Opções no Brasil** Out/2003
Claudio Henrique da Silveira Barbedo, Gustavo Silva Araújo, Eduardo Facó Lemgruber
- 80 **Diferenças e Semelhanças entre Países da América Latina: uma Análise de Markov Switching para os Ciclos Econômicos de Brasil e Argentina** Out/2003
Arnildo da Silva Correa
- 81 **Bank Competition, Agency Costs and the Performance of the Monetary Policy** Jan/2004
Leonardo Soriano de Alencar and Márcio I. Nakane
- 82 **Carteiras de Opções: Avaliação de Metodologias de Exigência de Capital no Mercado Brasileiro** Mar/2004
Cláudio Henrique da Silveira Barbedo e Gustavo Silva Araújo
- 83 **Does Inflation Targeting Reduce Inflation? An Analysis for the OECD Industrial Countries** May/2004
Thomas Y. Wu
- 84 **Speculative Attacks on Debts and Optimum Currency Area: a Welfare Analysis** May/2004
Aloisio Araujo and Marcia Leon
- 85 **Risk Premia for Emerging Markets Bonds: Evidence from Brazilian Government Debt, 1996-2002** May/2004
André Soares Loureiro and Fernando de Holanda Barbosa
- 86 **Identificação do Fator Estocástico de Descontos e Algumas Implicações sobre Testes de Modelos de Consumo** Maio/2004
Fabio Araujo e João Victor Issler
- 87 **Mercado de Crédito: uma Análise Econométrica dos Volumes de Crédito Total e Habitacional no Brasil** Dez/2004
Ana Carla Abrão Costa
- 88 **Ciclos Internacionais de Negócios: uma Análise de Mudança de Regime Markoviano para Brasil, Argentina e Estados Unidos** Dez/2004
Arnildo da Silva Correa e Ronald Otto Hillbrecht
- 89 **O Mercado de Hedge Cambial no Brasil: Reação das Instituições Financeiras a Intervenções do Banco Central** Dez/2004
Fernando N. de Oliveira

- 90 Bank Privatization and Productivity: Evidence for Brazil** Dec/2004
Márcio I. Nakane and Daniela B. Weintraub
- 91 Credit Risk Measurement and the Regulation of Bank Capital and Provision Requirements in Brazil – a Corporate Analysis** Dec/2004
Ricardo Schechtman, Valéria Salomão Garcia, Sergio Miki Koyama and Guilherme Cronemberger Parente
- 92 Steady-State Analysis of an Open Economy General Equilibrium Model for Brazil** Apr/2005
Mirta Noemi Sataka Bugarin, Roberto de Goes Ellery Jr., Victor Gomes Silva, Marcelo Kfoury Muinhos
- 93 Avaliação de Modelos de Cálculo de Exigência de Capital para Risco Cambial** Abr/2005
Claudio H. da S. Barbedo, Gustavo S. Araújo, João Maurício S. Moreira e Ricardo S. Maia Clemente
- 94 Simulação Histórica Filtrada: Incorporação da Volatilidade ao Modelo Histórico de Cálculo de Risco para Ativos Não-Lineares** Abr/2005
Claudio Henrique da Silveira Barbedo, Gustavo Silva Araújo e Eduardo Facó Lemgruber
- 95 Comment on Market Discipline and Monetary Policy by Carl Walsh** Apr/2005
Maurício S. Bugarin and Fábria A. de Carvalho
- 96 O que É Estratégia: uma Abordagem Multiparadigmática para a Disciplina** Ago/2005
Anthero de Moraes Meirelles
- 97 Finance and the Business Cycle: a Kalman Filter Approach with Markov Switching** Aug/2005
Ryan A. Compton and Jose Ricardo da Costa e Silva
- 98 Capital Flows Cycle: Stylized Facts and Empirical Evidences for Emerging Market Economies** Aug/2005
Helio Mori e Marcelo Kfoury Muinhos
- 99 Adequação das Medidas de Valor em Risco na Formulação da Exigência de Capital para Estratégias de Opções no Mercado Brasileiro** Set/2005
Gustavo Silva Araújo, Claudio Henrique da Silveira Barbedo, e Eduardo Facó Lemgruber
- 100 Targets and Inflation Dynamics** Oct/2005
Sergio A. L. Alves and Waldyr D. Areosa
- 101 Comparing Equilibrium Real Interest Rates: Different Approaches to Measure Brazilian Rates** Mar/2006
Marcelo Kfoury Muinhos and Márcio I. Nakane
- 102 Judicial Risk and Credit Market Performance: Micro Evidence from Brazilian Payroll Loans** Apr/2006
Ana Carla A. Costa and João M. P. de Mello
- 103 The Effect of Adverse Supply Shocks on Monetary Policy and Output** Apr/2006
Maria da Glória D. S. Araújo, Mirta Bugarin, Marcelo Kfoury Muinhos and Jose Ricardo C. Silva

- 104 Extração de Informação de Opções Cambiais no Brasil** Abr/2006
Eui Jung Chang e Benjamin Miranda Tabak
- 105 Representing Roommate's Preferences with Symmetric Utilities** Apr/2006
José Alvaro Rodrigues Neto
- 106 Testing Nonlinearities Between Brazilian Exchange Rates and Inflation Volatilities** May/2006
Cristiane R. Albuquerque and Marcelo Portugal
- 107 Demand for Bank Services and Market Power in Brazilian Banking** Jun/2006
Márcio I. Nakane, Leonardo S. Alencar and Fabio Kanczuk
- 108 O Efeito da Consignação em Folha nas Taxas de Juros dos Empréstimos Pessoais** Jun/2006
Eduardo A. S. Rodrigues, Victorio Chu, Leonardo S. Alencar e Tony Takeda
- 109 The Recent Brazilian Disinflation Process and Costs** Jun/2006
Alexandre A. Tombini and Sergio A. Lago Alves
- 110 Fatores de Risco e o Spread Bancário no Brasil** Jul/2006
Fernando G. Bignotto e Eduardo Augusto de Souza Rodrigues
- 111 Avaliação de Modelos de Exigência de Capital para Risco de Mercado do Cupom Cambial** Jul/2006
Alan Cosme Rodrigues da Silva, João Maurício de Souza Moreira e Myrian Beatriz Eiras das Neves
- 112 Interdependence and Contagion: an Analysis of Information Transmission in Latin America's Stock Markets** Jul/2006
Angelo Marsiglia Fasolo
- 113 Investigação da Memória de Longo Prazo da Taxa de Câmbio no Brasil** Ago/2006
Sergio Rubens Stancato de Souza, Benjamin Miranda Tabak e Daniel O. Cajueiro
- 114 The Inequality Channel of Monetary Transmission** Aug/2006
Marta Areosa and Waldyr Areosa
- 115 Myopic Loss Aversion and House-Money Effect Overseas: an Experimental Approach** Sep/2006
José L. B. Fernandes, Juan Ignacio Peña and Benjamin M. Tabak
- 116 Out-Of-The-Money Monte Carlo Simulation Option Pricing: the Joint Use of Importance Sampling and Descriptive Sampling** Sep/2006
Jaqueline Terra Moura Marins, Eduardo Saliby and Josete Florencio dos Santos
- 117 An Analysis of Off-Site Supervision of Banks' Profitability, Risk and Capital Adequacy: a Portfolio Simulation Approach Applied to Brazilian Banks** Sep/2006
Theodore M. Barnhill, Marcos R. Souto and Benjamin M. Tabak
- 118 Contagion, Bankruptcy and Social Welfare Analysis in a Financial Economy with Risk Regulation Constraint** Oct/2006
Aloísio P. Araújo and José Valentim M. Vicente

119	A Central de Risco de Crédito no Brasil: uma Análise de Utilidade de Informação <i>Ricardo Schechtman</i>	Out/2006
120	Forecasting Interest Rates: an Application for Brazil <i>Eduardo J. A. Lima, Felipe Ludovice and Benjamin M. Tabak</i>	Oct/2006
121	The Role of Consumer's Risk Aversion on Price Rigidity <i>Sergio A. Lago Alves and Mirta N. S. Bugarin</i>	Nov/2006
122	Nonlinear Mechanisms of the Exchange Rate Pass-Through: a Phillips Curve Model With Threshold for Brazil <i>Arnildo da Silva Correa and André Minella</i>	Nov/2006
123	A Neoclassical Analysis of the Brazilian "Lost-Decades" <i>Flávia Mourão Graminho</i>	Nov/2006
124	The Dynamic Relations between Stock Prices and Exchange Rates: Evidence for Brazil <i>Benjamin M. Tabak</i>	Nov/2006
125	Herding Behavior by Equity Foreign Investors on Emerging Markets <i>Barbara Alemanni and José Renato Haas Ornelas</i>	Dec/2006
126	Risk Premium: Insights over the Threshold <i>José L. B. Fernandes, Augusto Hasman and Juan Ignacio Peña</i>	Dec/2006
127	Uma Investigação Baseada em Reamostragem sobre Requerimentos de Capital para Risco de Crédito no Brasil <i>Ricardo Schechtman</i>	Dec/2006
128	Term Structure Movements Implicit in Option Prices <i>Caio Ibsen R. Almeida and José Valentim M. Vicente</i>	Dec/2006
129	Brazil: Taming Inflation Expectations <i>Afonso S. Bevilaqua, Mário Mesquita and André Minella</i>	Jan/2007
130	The Role of Banks in the Brazilian Interbank Market: Does Bank Type Matter? <i>Daniel O. Cajueiro and Benjamin M. Tabak</i>	Jan/2007
131	Long-Range Dependence in Exchange Rates: the Case of the European Monetary System <i>Sergio Rubens Stancato de Souza, Benjamin M. Tabak and Daniel O. Cajueiro</i>	Mar/2007
132	Credit Risk Monte Carlo Simulation Using Simplified Creditmetrics' Model: the Joint Use of Importance Sampling and Descriptive Sampling <i>Jaqueline Terra Moura Marins and Eduardo Saliby</i>	Mar/2007
133	A New Proposal for Collection and Generation of Information on Financial Institutions' Risk: the Case of Derivatives <i>Gilneu F. A. Vivan and Benjamin M. Tabak</i>	Mar/2007
134	Amostragem Descritiva no Apreçamento de Opções Europeias através de Simulação Monte Carlo: o Efeito da Dimensionalidade e da Probabilidade de Exercício no Ganho de Precisão <i>Eduardo Saliby, Sergio Luiz Medeiros Proença de Gouvêa e Jaqueline Terra Moura Marins</i>	Abr/2007

- 135 **Evaluation of Default Risk for the Brazilian Banking Sector** May/2007
Marcelo Y. Takami and Benjamin M. Tabak
- 136 **Identifying Volatility Risk Premium from Fixed Income Asian Options** May/2007
Caio Ibsen R. Almeida and José Valentim M. Vicente
- 137 **Monetary Policy Design under Competing Models of Inflation Persistence** May/2007
Solange Gouvea e Abhijit Sen Gupta
- 138 **Forecasting Exchange Rate Density Using Parametric Models: the Case of Brazil** May/2007
Marcos M. Abe, Eui J. Chang and Benjamin M. Tabak
- 139 **Selection of Optimal Lag Length in Cointegrated VAR Models with Weak Form of Common Cyclical Features** Jun/2007
Carlos Enrique Carrasco Gutiérrez, Reinaldo Castro Souza and Osmani Teixeira de Carvalho Guillén
- 140 **Inflation Targeting, Credibility and Confidence Crises** Aug/2007
Rafael Santos and Aloísio Araújo
- 141 **Forecasting Bonds Yields in the Brazilian Fixed income Market** Aug/2007
Jose Vicente and Benjamin M. Tabak
- 142 **Crises Análise da Coerência de Medidas de Risco no Mercado Brasileiro de Ações e Desenvolvimento de uma Metodologia Híbrida para o Expected Shortfall** Ago/2007
Alan Cosme Rodrigues da Silva, Eduardo Facó Lemgruber, José Alberto Rebello Baranowski e Renato da Silva Carvalho
- 143 **Price Rigidity in Brazil: Evidence from CPI Micro Data** Sep/2007
Solange Gouvea
- 144 **The Effect of Bid-Ask Prices on Brazilian Options Implied Volatility: a Case Study of Telemar Call Options** Oct/2007
Claudio Henrique da Silveira Barbedo and Eduardo Facó Lemgruber
- 145 **The Stability-Concentration Relationship in the Brazilian Banking System** Oct/2007
Benjamin Miranda Tabak, Solange Maria Guerra, Eduardo José Araújo Lima and Eui Jung Chang
- 146 **Movimentos da Estrutura a Termo e Critérios de Minimização do Erro de Previsão em um Modelo Paramétrico Exponencial** Out/2007
Caio Almeida, Romeu Gomes, André Leite e José Vicente
- 147 **Explaining Bank Failures in Brazil: Micro, Macro and Contagion Effects (1994-1998)** Oct/2007
Adriana Soares Sales and Maria Eduarda Tannuri-Pianto
- 148 **Um Modelo de Fatores Latentes com Variáveis Macroeconômicas para a Curva de Cupom Cambial** Out/2007
Felipe Pinheiro, Caio Almeida e José Vicente
- 149 **Joint Validation of Credit Rating PDs under Default Correlation** Oct/2007
Ricardo Schechtman

- 150 **A Probabilistic Approach for Assessing the Significance of Contextual Variables in Nonparametric Frontier Models: an Application for Brazilian Banks** Oct/2007
Roberta Blass Staub and Geraldo da Silva e Souza
- 151 **Building Confidence Intervals with Block Bootstraps for the Variance Ratio Test of Predictability** Nov/2007
Eduardo José Araújo Lima and Benjamin Miranda Tabak
- 152 **Demand for Foreign Exchange Derivatives in Brazil: Hedge or Speculation?** Dec/2007
Fernando N. de Oliveira and Walter Novaes
- 153 **Aplicação da Amostragem por Importância à Simulação de Opções Asiáticas Fora do Dinheiro** Dez/2007
Jaqueline Terra Moura Marins
- 154 **Identification of Monetary Policy Shocks in the Brazilian Market for Bank Reserves** Dec/2007
Adriana Soares Sales and Maria Tannuri-Pianto
- 155 **Does Curvature Enhance Forecasting?** Dec/2007
Caio Almeida, Romeu Gomes, André Leite and José Vicente
- 156 **Escolha do Banco e Demanda por Empréstimos: um Modelo de Decisão em Duas Etapas Aplicado para o Brasil** Dez/2007
Sérgio Mikio Koyama e Márcio I. Nakane
- 157 **Is the Investment-Uncertainty Link Really Elusive? The Harmful Effects of Inflation Uncertainty in Brazil** Jan/2008
Tito Nícias Teixeira da Silva Filho
- 158 **Characterizing the Brazilian Term Structure of Interest Rates** Feb/2008
Osmani T. Guillen and Benjamin M. Tabak
- 159 **Behavior and Effects of Equity Foreign Investors on Emerging Markets** Feb/2008
Barbara Alemanni and José Renato Haas Ornelas
- 160 **The Incidence of Reserve Requirements in Brazil: Do Bank Stockholders Share the Burden?** Feb/2008
Fábia A. de Carvalho and Cyntia F. Azevedo
- 161 **Evaluating Value-at-Risk Models via Quantile Regressions** Feb/2008
Wagner P. Gaglianone, Luiz Renato Lima and Oliver Linton
- 162 **Balance Sheet Effects in Currency Crises: Evidence from Brazil** Apr/2008
Marcio M. Janot, Márcio G. P. Garcia and Walter Novaes
- 163 **Searching for the Natural Rate of Unemployment in a Large Relative Price Shocks' Economy: the Brazilian Case** May/2008
Tito Nícias Teixeira da Silva Filho
- 164 **Foreign Banks' Entry and Departure: the recent Brazilian experience (1996-2006)** Jun/2008
Pedro Fachada
- 165 **Avaliação de Opções de Troca e Opções de Spread Europeias e Americanas** Jul/2008
Giuliano Carrozza Uzêda Iorio de Souza, Carlos Patrício Samanez e Gustavo Santos Raposo

- 166 **Testing Hyperinflation Theories Using the Inflation Tax Curve: a case study** Jul/2008
Fernando de Holanda Barbosa and Tito Nícias Teixeira da Silva Filho
- 167 **O Poder Discriminante das Operações de Crédito das Instituições Financeiras Brasileiras** Jul/2008
Clodoaldo Aparecido Annibal
- 168 **An Integrated Model for Liquidity Management and Short-Term Asset Allocation in Commercial Banks** Jul/2008
Wenersamy Ramos de Alcântara
- 169 **Mensuração do Risco Sistêmico no Setor Bancário com Variáveis Contábeis e Econômicas** Jul/2008
Lucio Rodrigues Capelletto, Eliseu Martins e Luiz João Corrar
- 170 **Política de Fechamento de Bancos com Regulador Não-Benevolente: Resumo e Aplicação** Jul/2008
Adriana Soares Sales
- 171 **Modelos para a Utilização das Operações de Redesconto pelos Bancos com Carteira Comercial no Brasil** Ago/2008
Sérgio Mikio Koyama e Márcio Issao Nakane
- 172 **Combining Hodrick-Prescott Filtering with a Production Function Approach to Estimate Output Gap** Aug/2008
Marta Areosa
- 173 **Exchange Rate Dynamics and the Relationship between the Random Walk Hypothesis and Official Interventions** Aug/2008
Eduardo José Araújo Lima and Benjamin Miranda Tabak
- 174 **Foreign Exchange Market Volatility Information: an investigation of real-dollar exchange rate** Aug/2008
Frederico Pechir Gomes, Marcelo Yoshio Takami and Vinicius Ratton Brandi
- 175 **Evaluating Asset Pricing Models in a Fama-French Framework** Dec/2008
Carlos Enrique Carrasco Gutierrez and Wagner Piazza Gaglianone
- 176 **Fiat Money and the Value of Binding Portfolio Constraints** Dec/2008
Mário R. Páscoa, Myrian Petrassi and Juan Pablo Torres-Martínez
- 177 **Preference for Flexibility and Bayesian Updating** Dec/2008
Gil Riella
- 178 **An Econometric Contribution to the Intertemporal Approach of the Current Account** Dec/2008
Wagner Piazza Gaglianone and João Victor Issler
- 179 **Are Interest Rate Options Important for the Assessment of Interest Rate Risk?** Dec/2008
Caio Almeida and José Vicente
- 180 **A Class of Incomplete and Ambiguity Averse Preferences** Dec/2008
Leandro Nascimento and Gil Riella
- 181 **Monetary Channels in Brazil through the Lens of a Semi-Structural Model** Apr/2009
André Minella and Nelson F. Souza-Sobrinho