



BANCO CENTRAL DO BRASIL

Trabalhos para Discussão

165

**Avaliação de Opções de Troca e Opções de
Spread Européias e Americanas**

*Giuliano Carrozza Uzêda Iorio de Souza,
Carlos Patrício Samanez e Gustavo Santos Raposo*
Julho, 2008

ISSN 1519-1028
CGC 00.038.166/0001-05

Trabalhos para Discussão	Brasília	n° 165	jul	2008	p. 1-53
--------------------------	----------	--------	-----	------	---------

Trabalhos para Discussão

Editado pelo Departamento de Estudos e Pesquisas (Depep) – *E-mail*: workingpaper@bcb.gov.br

Editor: Benjamin Miranda Tabak – *E-mail*: benjamin.tabak@bcb.gov.br

Assistente Editorial: Jane Sofia Moita – *E-mail*: jane.sofia@bcb.gov.br

Chefe do Depep: Carlos Hamilton Vasconcelos Araújo – *E-mail*: carlos.araujo@bcb.gov.br

Todos os Trabalhos para Discussão do Banco Central do Brasil são avaliados em processo de *double blind referee*.

Reprodução permitida somente se a fonte for citada como: Trabalhos para Discussão nº 165.

Autorizado por Mário Mesquita, Diretor de Política Econômica.

Controle Geral de Publicações

Banco Central do Brasil

Secre/Surel/Dimep

SBS – Quadra 3 – Bloco B – Edifício-Sede – 1º andar

Caixa Postal 8.670

70074-900 Brasília – DF

Telefones: (61) 3414-3710 e 3414-3567

Fax: (61) 3414-3626

E-mail: editor@bcb.gov.br

As opiniões expressas neste trabalho são exclusivamente do(s) autor(es) e não refletem, necessariamente, a visão do Banco Central do Brasil.

Ainda que este artigo represente trabalho preliminar, citação da fonte é requerida mesmo quando reproduzido parcialmente.

The views expressed in this work are those of the authors and do not necessarily reflect those of the Banco Central or its members.

Although these Working Papers often represent preliminary work, citation of source is required when used or reproduced.

Central de Atendimento ao Público

Endereço: Secre/Surel/Diate

Edifício-Sede – 2º subsolo

SBS – Quadra 3 – Zona Central

70074-900 Brasília – DF

DDG: 0800 9792345

Fax: (61) 3414-2553

Internet: <http://www.bcb.gov.br>

Avaliação de Opções de Troca e Opções de *Spread* Europeias e Americanas

Giuliano Carrozza Uzêda Iorio de Souza^{*}
Carlos Patrício Samanez^{**}
Gustavo Santos Raposo^{***}

Resumo

Este Trabalho para Discussão não deve ser citado como representando as opiniões do Banco Central do Brasil. As opiniões expressas neste trabalho são exclusivamente dos autores e não refletem, necessariamente, a visão do Banco Central do Brasil.

O presente trabalho considera a avaliação de opções de troca e de *spread* europeias e americanas. Quanto à análise das opções europeias em questão, desenvolveu-se um modelo baseado no Método de Simulação de Monte Carlo, considerando a simulação conjunta das trajetórias de preços dos ativos referenciados. Os resultados do mesmo foram comparados com os prêmios estimados por meio das fórmulas de Margrabe (1978) e Kirk (1995), respectivamente. Considerando a avaliação de opções americanas, desenvolveu-se um modelo que consiste em uma adaptação do método Mínimos Quadrados de Monte Carlo (MQMC), de Longstaff e Schwartz (2001), de forma a considerar o caso multidimensional. Os resultados encontrados foram comparados com aqueles obtidos a partir dos modelos de Rubinstein (1994) e de Brandimarte (2006), ambos baseados no método *lattice* piramidal. Note-se que, ao contrário dos modelos *lattice* piramidais, a adaptação do modelo MQMC possui a vantagem de permitir a extensão para três ou mais ativos subjacentes.

Palavras-chave: Derivativos, Opções, Métodos Numéricos.

Classificação JEL: G, G1, G13.

^{*} Departamento de Operações Bancárias e de Sistema de Pagamentos, Banco Central do Brasil.

E-mail: giuliano.iorio@bcb.gov.br

^{**} Departamento de Engenharia Industrial, PUC-Rio; Faculdade de Economia, UERJ.

E-mail: cps@rdc.puc-rio.br.

^{***} Global Risk Management Department, Vale - CVRD International SA.

E-mail: gustavo.raposo@vale.com

1. Introdução

Opções multidimensionais são opções cujo resultado é função do preço de dois ou mais ativos. Além das opções de troca e das opções de *spread*, foco de estudo desse artigo, pode-se citar como alguns dos principais exemplos desse tipo de derivativo as opções sobre o preço mínimo ou máximo de um conjunto de ativos, as opções sobre a razão ou o produto do preço de dois ou mais ativos, as opções sobre uma carteira de ativos, entre outras.

Margrabe (1978) foi o primeiro a obter uma solução analítica para o apreamento de opções de troca européias, demonstrando ainda que o exercício antecipado desse tipo de opção não é justificável caso os ativos subjacentes não prevejam a distribuição de dividendos. Por conseguinte, na ausência de dividendos, os resultados encontrados por ele para opções européias tornam-se válidos também para opções americanas. Adicionalmente, Margrabe derivou as relações de paridade entre opções americanas de compra e venda desse tipo de derivativo.

Embora as opções de troca possam ser vistas como opções de compra sobre o ativo 1 - com preço de exercício igual ao preço do ativo 2 - ou opções de venda sobre o ativo 2 - com preço de exercício igual ao preço do ativo 1 -, a constatação de Margrabe (1978) quanto ao exercício antecipado de opções de troca sobre ativos subjacentes sem dividendos não é conflitante com aquela apresentada por Merton (1973), que demonstrou que nunca é ótimo exercer antecipadamente uma opção americana de compra *vanilla* sobre ações sem dividendos, mas que o mesmo não poderia ser dito em relação às opções de venda. A distinção entre as conclusões de Merton (1973) e Margrabe (1978) decorre do fato de que, no caso das opções *vanilla*, o preço de exercício é fixo, já no que se refere às opções de troca, o preço de exercício é representado pelo preço de um outro ativo subjacente e, portanto, muda ao longo do tempo.

Stulz (1982) desenvolveu fórmulas analíticas para o apreamento de opções européias de compra e de venda sobre o preço máximo ou o mínimo de dois ativos. Mostrou-se que uma opção de compra sobre o preço mínimo de dois ativos pode ser avaliada a partir da fórmula aplicada às opções de troca proposta por Margrabe (1978), sendo a única condição que o preço de exercício seja nulo, ou seja, que no cálculo do *payoff* o preço mínimo dos ativos subjacentes não seja subtraído de um montante fixo

representado pelo preço de exercício. Slutz (1982) demonstrou também que o preço de uma opção de compra europeia sobre o mínimo entre dois ativos aumenta na medida em que a correlação entre estes se aproxima de 1. Essa constatação decorre do fato de que quando há um aumento no coeficiente de correlação entre os dois ativos, a probabilidade do preço do ativo 1 e do ativo 2 no vencimento estarem acima do preço de exercício da opção também aumenta, tornando maior o valor esperado do *payoff* da opção.

Johnson (1987) estendeu os resultados encontrados por Stulz (1982), considerando o apreçamento de opções de compra sobre o mínimo e máximo de múltiplos ativos, enquanto Kirk (1995) desenvolveu solução analítica para o apreçamento de opções de *spread* europeias. Cabe ressaltar que, conforme será visto no próximo item desse artigo, as opções de troca são na verdade opções de *spread* com preço de exercício nulo.

Cox et al. (1985) e Longstaff (1990) apresentaram soluções analíticas para uma variedade de opções sobre taxa de juros, incluindo a opção de trocar uma taxa de juros por outra, análoga às opções de troca de ativos estudadas por Margrabe (1978). Nessa linha, Qiang Fu (1996) estudou o problema de apreçamento de opções europeias cujo *payoff* é representado pela diferença entre uma mesma taxa de juros medida em vértices diferentes (*yield-curve spread options*), defendendo a importância da utilização de modelos com dois fatores de modo a considerar os movimentos imperfeitos das taxas de juros.

Berrahouim (2007) desenvolveu dois métodos para avaliação de opções de *spread* e opções digitais com a capacidade de ajuste em função do comportamento da curva de volatilidade - sorriso da volatilidade (*smile*). Berrahouim defende que o preço da opção sobre *spread* é sensível ao formato da curva de volatilidade dos ativos subjacentes, mas que o efeito maior ocorre sobre as opções digitais. O primeiro método proposto pelo autor consiste em alterar o preço de exercício da opção em função da volatilidade de cada ativo subjacente, representando apenas uma consideração parcial do sorriso da volatilidade. O segundo método leva em consideração a curva total de volatilidade, e envolve cálculos de integração numérica mais sofisticados.

Embora diversos autores tenham desenvolvido soluções analíticas para apreçamento de opções multidimensionais, estas são aplicáveis somente em alguns casos específicos, não permitindo acomodar, por exemplo, a possibilidade de exercício

antecipado das opções americanas. Assim, em paralelo ao desenvolvimento de soluções analíticas (ou fechadas) para problemas com derivativos dependentes de mais de um ativo subjacente, foram exigidos ao longo do tempo renovados esforços para o aprimoramento dos métodos numéricos adequados à solução de diversos problemas relacionados ao tema. Ademais, mesmo nos casos em que há solução analítica, é desejável que se desenvolvam soluções alternativas que, além de apresentarem supostamente os mesmos resultados de uma solução analítica, contemplem a possibilidade da realização de análises adicionais, como o cálculo de probabilidades de exercício de opções através do método de Simulações de Monte Carlo ou o cálculo de medidas de sensibilidade (letras gregas) para elaboração de estratégias de *hedge*.

Os métodos numéricos podem ser divididos basicamente em três categorias: métodos para solução de equações diferenciais parciais, com destaque para os métodos de diferenças finitas, introduzidos no campo de finanças por Brennan and Schwartz (1997); Método de Simulação de Monte Carlo, cuja primeira aplicação em finanças foi realizada por Boyle (1977); e métodos *lattice*, proposto inicialmente por Cox et al. (1979).

O método de Simulação de Monte Carlo tem sido estendido freqüentemente para avaliação de diversos tipos de derivativos. Na teoria financeira, a Simulação de Monte Carlo tem sido usada largamente no cálculo das opções, na medição de risco de mercado e de crédito, no cálculo do Valor em Risco (VaR), na análise de projetos de investimento, na avaliação de projetos por Opções Reais, entre outros. No que se refere à avaliação de opções, alguns modelos derrubaram a crença de que os métodos de simulação seriam aplicáveis somente à avaliação de opções européias, ou seja, que não apresentavam flexibilidade para avaliação de opções americanas. Um dos modelos que se destaca nesse sentido é o método Mínimos Quadrados de Monte Carlo (*Least Squares Monte Carlo*), de Longstaff e Schwartz (2001). Iorio *et al* (2006) apresentam uma aplicação desse método, bem como dos métodos de Grand, Vora e Weeks (1996) e de Diferenças Finitas para avaliação de títulos conversíveis com opções de compra americanas e opções de venda bermuda implícitas em contrato. Araújo (2004) avaliou opções reais a partir do Método dos Mínimos Quadrados de Monte Carlo.

Baseados no Método de Simulação de Monte Carlo, Villani (2007) desenvolveu modelos para apreçamento de três tipos de opções multidimensionais: (i) opções européias de troca sobre ativos subjacentes que contemplam a distribuição de

dividendos; (ii) opções européias de troca em que o ativo subjacente é outra opção de troca (*compound exchange*), e; (iii) opções de troca pseudo-americanas, que representam opções com mais de uma data de exercício, também conhecidas como opções bermuda. Em seus modelos, Villani (2007) reduziu a bi-dimensionalidade do problema de avaliação de opções de troca a partir da simulação de valores para a razão entre os preços dos ativos subjacentes. Os resultados encontrados foram comparados com aqueles apresentados por Margrabe (1978) - opções européias de troca sobre ativos subjacentes que contemplam a distribuição de dividendos -, Carr (1988) - opções européias de troca em que o ativo subjacente é outra opção de troca -, e Armada *et al* (2007) - opções pseudo-americanas.

No campo dos modelos que utilizam a abordagem *lattice* para tratar da avaliação de opções multidimensionais, apresentando boa flexibilidade e permitindo uma interpretação intuitiva do problema analisado, pode-se destacar os trabalhos Venkatramanan (2005), Boyle (1988), Boyle, Evnine e Gibbs (1989), Kamrad e Ritchken (1991), Brandimarte (2006) e Rubinstein (1994).

Venkatramanan (2005) apresentou um modelo *lattice* de 3 dimensões com interpolação multidimensional para avaliação de opções européias e americanas lançadas sobre dois ou mais ativos. Da mesma forma que Berrahouim (2007), o modelo de Venkatramanan permite considerar ajustes em função do sorriso da volatilidade.

Boyle (1988) desenvolveu um modelo trinomial para avaliação de opções americanas de venda sobre o preço mínimo entre dois ativos subjacentes em que as probabilidades de mudanças em seus preços são obtidas a partir da melhor aproximação dos dois primeiros momentos da distribuição discretizada em relação àqueles obtidos a partir da distribuição lognormal conjunta dos retornos. Assim, como premissa básica, Boyle assumiu que a distribuição de probabilidade dos preços dos dois ativos subjacentes é lognormal bivariada. Considerando dois ativos subjacentes, o modelo de Boyle considera como aproximação do processo conjunto lognormal bivariado dos preços destes ativos cinco trajetórias de preço alternativas.

Como a aplicação do modelo de Boyle (1988) podia gerar probabilidades negativas para as mudanças nos preços dos ativos subjacentes, Boyle, Evnine e Gibbs (1989) consideraram uma modelagem alternativa para avaliação de opções européias de venda sobre múltiplos ativos em que, no caso de dois ativos subjacentes, são usados quatro movimentos de preço para aproximação do processo estocástico do retorno

logaritmo dos preços. Através da aproximação da função geradora de momentos da distribuição aproximada com a função geradora de momentos real da distribuição normal, o problema recai, em cada mudança de tempo, na resolução de um sistema com quatro equações e quatro incógnitas. A única expressão probabilística para a distribuição multinomial é então usada para avaliação do derivativo estudado. Apesar de Boyle, Evnine e Gibbs (1989) terem avaliado a acurácia do modelo a partir de sua aplicação a uma opção europeia com 3 ativos subjacentes, uma característica do método em questão é que este pode captar facilmente a possibilidade de exercício antecipado de opções americanas.

Kamrad e Ritchken (1991) desenvolveram uma metodologia alternativa e mais generalizada para avaliação de derivativos sobre um ou mais ativos subjacentes que, assim como Boyle, Evnine e Gibbs (1989), consiste na discretização do processo estocástico do retorno logaritmo dos preços a partir de uma árvore multinomial. Porém, ao contrário de Boyle, Evnine e Gibbs (1989), a árvore de Kamrad e Ritchken (1991) permite movimentos horizontais dos preços. Assim, Kamrad e Ritchken demonstraram que o modelo binomial de Cox, Ross e Rubinstein (1979) representava um caso particular de seu modelo quando aplicado à apenas uma variável de estado. Já o modelo de Boyle, Evnine e Gibbs (1989) representava um caso especial de seu modelo quando aplicado a duas variáveis de estado.

Outros modelos de destaque que utilizam a abordagem *lattice* para avaliação de opções sobre dois ativos correlacionados são os modelos de Brandimarte (2006) e Rubinstein (1994), que se baseiam em uma árvore tri-dimensional em que as discretizações de dois processos estocásticos correlacionados são representadas em pirâmides binomiais. O modelo de Brandimarte internaliza a correlação entre os ativos subjacentes nos preços possíveis do segundo ativo a partir dos preços observados do primeiro ativo, enquanto o modelo de Rubinstein considera a correlação entre os ativos subjacentes na definição das probabilidades de alta ou baixa de seus preços.

O presente artigo considera a avaliação de opções de troca e opções de *spread* europeias e americanas a partir da aplicação de alguns dos principais métodos descritos anteriormente, e está dividido em cinco seções. Após a presente introdução, o item 2 está focado em detalhar aspectos gerais inerentes às opções multidimensionais, descrevendo suas características e particularidades. Os itens 3 tratam especificamente da avaliação de opções de troca e opções de *spread* europeias. O modelo proposto para

avaliação desses derivativos baseia-se no Método de Simulação de Monte Carlo que, nas aplicações em questão, considera a simulação conjunta dos ativos subjacentes referenciados, o que se torna necessário para que se leve em conta a correlação existente entre estes. Após a apresentação do modelo, realiza-se a aplicação do mesmo em situações específicas, considerando tanto a avaliação de opções de troca quanto opções de *spread* européias. O julgamento da consistência dos resultados obtidos é então realizado a partir da comparação com os prêmios das opções gerados por meio da aplicação das fórmulas de Margrabe (1978) - no caso de opções de troca - e Kirk (1995) - no caso de opções de *spread*¹.

Após a avaliação das opções européias, o item 4 é dedicado à análise de opções de troca e opções de *spread* americanas, quando são considerados três modelos específicos. O primeiro e o segundo modelo consistem em uma aplicação dos métodos *lattice* baseado em pirâmides binomiais de Rubinstein (1994) e de Brandimarte (2006), respectivamente. Já o terceiro modelo dedicado à avaliação das opções americanas em estudo refere à aplicação do método dos Mínimos Quadrados de Monte Carlo (MQMC) de Longstaff e Schwartz (2001) para avaliação desses derivativos. Cabe destacar que, como este foi desenvolvido originalmente para avaliação de opções americanas *vanilla*, tornou-se necessária uma adaptação do mesmo de forma a considerar o caso multidimensional. Assim, em uma etapa seguinte, são realizadas aplicações dos três modelos - *lattice* de Rubinstein (1994), *lattice* de Brandimarte (2006) e MQMC de Longstaff e Schwartz (2001) - considerando alguns exemplos de opções americanas de troca e de *spread*, comparando-se os resultados encontrados por cada metodologia empregada.

Finalmente, o item 7 é dedicado aos comentários e conclusões finais.

2. Opções de troca, opções de spread e outras opções multidimensionais

A principal peculiaridade das opções multidimensionais são os payoffs dependentes do preço de dois ou mais ativos. 2 Nessa linha, considerando S_i como o preço do ativo i , alguns exemplos de opções multidimensionais são:

¹ As fórmulas propostas por Kirk e Margrabe são apresentadas no anexo 1.

² Algumas subclassificações das opções multidimensionais são as opções arco-íris (em inglês, *Rainbow Options*), que normalmente referenciam o preço de três ou mais ativos, ou as *basket options*, que recebem esse nome por referenciar uma cesta de ativos.

- Opção de troca → O payoff é definido com base na diferença de preços entre dois ativos.

payoff da opção de compra: $\max(S_2 - S_1, 0)$ (1)

payoff da opção de venda: $\max(S_1 - S_2, 0)$ (2)
- Opção sobre o preço máximo de dois ou mais ativos → Como o próprio nome indica, o payoff é definido com base no preço máximo entre dois ou mais ativos. A aplicação direta desse tipo de opção consiste no hedge de carteiras com ativos com correlações negativas.

Payoff da opção de compra considerando dois ativos subjacentes: $\max[\max(S_1, S_2) - X, 0]$ (3)

Payoff da opção de venda considerando dois ativos subjacentes: $\max[X - \max(S_2, S_1), 0]$ (4)
- Opção sobre o preço mínimo de dois ou mais ativos → Como o próprio nome indica, o payoff é definido com base no preço mínimo entre dois ou mais ativos. A aplicação direta desse tipo de opção é a mesma referente às opções sobre o preço máximo de ativos, ou seja, no hedge de carteiras com ativos com correlações negativas.

payoff da opção de compra considerando dois ativos subjacentes: $\min[\min(S_1, S_2) - X, 0]$ (5)

payoff da opção de venda considerando dois ativos subjacentes: $\min[X - \min(S_2, S_1), 0]$ (6)
- Opção de spread → Como nas opções de troca, o payoff é definido com base na diferença de preços entre dois ativos. Porém, considera-se ainda um preço de exercício em seu cálculo. Na verdade, as opções de troca são essencialmente opções de spread com preço de exercício nulo.

payoff da opção de compra: $\max[(S_2 - S_1) - X, 0]$ (7)

payoff da opção de venda: $\max[X - (S_2 - S_1), 0]$ (8)
- Opção com preço de exercício duplo → O payoff é baseado em dois preços de exercício, cada um dependente de um ativo subjacente distinto.

payoff da opção de compra: $\max[(S_1 - K_1), (S_2 - K_2), 0]$ (9)

payoff da opção de venda: $\max[(K_1 - S_1), (K_2 - S_2), 0]$ (10)
- Opção sobre a razão entre os preços dos ativos subjacentes → Como o próprio nome indica, o payoff é baseado na razão entre os preços de dois ativos.

payoff da opção de compra: $\max(S_2/S_1 - X, 0)$ (11)

payoff da opção de venda: $\max(X - S_2/S_1, 0)$ (12)
- Opção sobre o produto dos preços dos ativos subjacentes → Como o próprio nome indica, o payoff é baseado no produto entre os preços de dois ativos.

payoff da opção de compra: $\max(S_2 \times S_1 - X, 0)$ (13)

payoff da opção de venda: $\max(X - S_2 \times S_1, 0)$ (14)

- Opções sobre carteiras → O payoff é baseado no valor de uma carteira com percentuais específicos alocados em dois ou mais ativos subjacentes.
 payoff da opção de compra: $\max[(n_1 S_1 + \dots + n_m S_m) - X, 0]$, onde $n_i > 0$ (15)
 payoff da opção de venda: $\max[X - (n_1 S_1 + \dots + n_m S_m), 0]$, onde $n_i > 0$ (16)

Assim, no que se refere às opções de troca e opções de spread, que representam os derivativos analisados no presente artigo, e cujos *payoffs* tomam como referência a diferença de preços entre dois ativos subjacentes, essas podem ser negociadas sobre uma grande variedade de ativos, como ações, taxas de juros, commodities, contratos futuros, entre outros. Tem o potencial de representar, portanto, oportunidades de *hedge* e investimento a diferentes participantes do mercado.

Por exemplo, no mercado de renda fixa, o *payoff* de uma opção de spread pode ser definido pela diferença entre duas ou mais taxas de juros, como no caso das opções sobre a diferença de rentabilidade de hipotecas e títulos do tesouro americano, oferecidas pelo banco Goldman Sachs (*Mortgage Over Treasury Options- MOTTO*), ou ainda a partir de uma mesma taxa de juros observada em vértices diferentes, como a opção sobre a inclinação da curva de juros de títulos do tesouro americano, também oferecidas pelo Goldman Sachs (*Slope-of-the-Yield-Curve Options*). Há ainda as *Spread-Lock Options*, representando opções sobre swaps de taxas de juros, que oferecem ao titular de uma opção de compra o direito de comprar um swap de taxa de juros que, por sua vez, representa a possibilidade de recebimento de um montante corrigido pela diferença entre uma taxa fixa e uma taxa flutuante. Por outro lado, o titular da opção de venda adquire o direito de vender um swap de taxas de juros que, nesse caso, representa a possibilidade de recebimento de um montante corrigido pela diferença entre uma taxa flutuante e uma taxa fixa.

No mercado de commodities, as opções de troca e as opções e spread podem tomar como referência a diferença entre diversos tipos de preços, como: (i) preços de uma mesma commodity negociada em duas regiões diferentes (*location spreads options*); (ii) preços de uma mesma commodity avaliados em instantes de tempo distintos (*calendar spreads options*); (iii) preços de insumos e produtos finais referentes a um processo de produção específico (*processing spreads options*), e; (iv) preços de um mesmo produto considerando níveis de qualidade distintos (*quality spreads options*).

No mercado de energia, a maioria dos participantes lida com as chamadas *crack spread options* e *spark spread options*. As *crack spread options* representam a compra ou venda simultânea de petróleo cru e um produto derivado do petróleo refinado. Nesse caso, a diferença de preço entre os dois ativos subjacentes considerados representa o valor agregado pelo refino do petróleo. Já as *spark spread options* representam uma proxy do custo de se converter um combustível específico (normalmente gás natural) em energia elétrica. Em termos práticos, as *spark spread options* tomam por base a diferença entre o preço do combustível utilizado para gerar uma determinada energia e o preço da mesma após atingir o estado final de consumo.

Embora a negociação desses derivativos seja realizada normalmente no mercado de balcão, esses também podem ser negociados em bolsas de valores. Por exemplo, de forma a permitir que os participantes do mercado de energia pudessem administrar melhor o risco de variação de preços, a New York Mercantile Exchange (NYMEX) introduziu em 1994 as *crack spread options*, oferecendo opções de spread do tipo americana baseadas na diferença de preços entre o petróleo combustível (*heating oil*) e o petróleo cru, e sobre a diferença de preços de entre um tipo específico de gasolina, a RBOB (*Reformulated Gasoline Blendstock for Oxygen Blending*), e o preço do petróleo cru.

Adicionalmente, a NYMEX oferece atualmente (desde 2002) as *calendar spreads options*, baseadas na diferença de preços entre contratos futuros com vencimentos distintos que, por sua vez, podem tomar como referência diversos produtos, como petróleo combustível, energia elétrica, petróleo bruto, gás natural e gasolina. Em seu exercício, o comprador de uma opção de venda deste tipo assume uma posição vendida no mercado futuro para o vencimento mais curto e uma posição comprada no mercado futuro para o vencimento mais longo, adquirindo, por conseguinte, um *hedge* contra a possibilidade de que os custos de carregamento do ativo referenciado nos contratos futuros tornem-se maiores. Já o comprador de uma opção de compra assume uma posição oposta, ou seja, uma posição vendida no mercado futuro para o vencimento mais longo e uma posição comprada no mercado futuro para o vencimento mais curto. Nessa linha, as *calendar spread options* representam uma alternativa de *hedge* mais prática e normalmente mais barata do que a negociação direta de contratos futuros com vencimentos distintos.

As opções de *spread* estão presentes também no mercado agrícola, como nas chamadas *crush spread options* oferecidas na Chicago Board of Trade (CBOT). Além do contrato futuro de soja, o outro ativo referenciado nesse caso é um contrato futuro de óleo de soja ou de grão de soja. Por sua vez, o valor da opção de *spread* oferecido pela CBOT depende da diferença entre o preço do grão ou do óleo extraído de um *bushel* (oito galões) de soja menos o preço do *bushel* de soja. Dessa forma, pode-se dizer que se trata também de uma *processing spreads option*, sendo o produto bruto a soja, e seu derivado o óleo de soja ou o grão de soja.

Embora as opções de troca e opções de *spread* ainda não sejam oferecidas no Brasil, estas poderiam ser implementadas considerando as diferenças entre preços de uma grande variedade de ativos, como taxas de juros, commodities, contratos futuros, *swaps*, ações ordinárias e preferenciais de emissão de uma mesma empresa, ações de duas empresas de um mesmo setor ou de setores distintos, entre outros.

Em relação às opções baseadas em duas ou mais ações distintas, essas produziriam efeitos equivalentes à compra e venda simultânea dessas ações no mercado a vista, porém, nesse caso, deixaria de existir a necessidade de posse do ativo a ser vendido ou a obrigação de alugá-lo, bem como a obrigação de compra e venda no mercado a vista. Por conseguinte, tornar-se-ia possível que o participante do mercado aproveitasse o movimento relativo de preços entre os dois ativos referenciados com custos menores e maior alavancagem. Azevedo e Barbachan (2004) apresentaram uma comparação dos resultados obtidos a partir da compra de opções de troca européias e da compra e venda simultânea dos ativos subjacentes referenciados na opção, demonstrando que quando o mercado se move no sentido oposto ao esperado os prejuízos são minimizados através da utilização de opções de troca.

Outra aplicação das opções de troca e opções de *spread* no mercado brasileiro seria o uso das *spread-lock options*, que poderiam referenciar os diversos *swaps* negociados na BM&F, ou ainda a implementação de *calendar spreads options* baseadas na diferença de preços entre os contratos futuros da BM&F com vencimentos distintos, como os contratos futuros mini de café, boi gordo, dólar, Ibovespa, ou qualquer outro contrato futuro padrão negociado na bolsa. Assim, a negociação desses derivativos poderia representar a oportunidade mais prática e mais barata de *hedge* contra a possibilidade de que os custos de carregamento do ativo referenciado nos contratos futuros sofram alterações desfavoráveis ao participante.

3. Avaliação de opções de troca e opções de spread européias por Simulação de Monte Carlo

3.1 Descrição do modelo

A avaliação de opções *vanilla* européias através do Método Simulação de Monte Carlo pode ser resumida em três etapas:

1. Simulações dos valores da ação subjacente na data de vencimento da opção (mundo neutro ao risco);
2. Determinação do *payoff* do derivativo;
3. Apreçamento da opção através da média do valor presente dos payoffs à taxa de juros livre de risco (mundo neutro ao risco).

Assim, admitindo-se que o preço da ação subjacente segue o Movimento Geométrico Browniano, pode-se demonstrar que o modelo discreto apropriado de evolução do logaritmo neperiano do preço da ação subjacente é:

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - q\right)\Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}} \quad (17)$$

No mundo neutro ao risco, a expectativa de retorno do investimento na ação subjacente já está embutida no seu preço, de forma que não se torna necessário conhecê-la. Desta forma, antes de iniciar as simulações, deve-se substituir μ pela taxa de juros livre de risco na equação (17). Assim, a partir da simulação de valores para ε (que segue uma distribuição normal padronizada), são definidas as possíveis trajetórias a serem percorridas pelo valor da ação subjacente ao longo do tempo. Na medida em que o número de trajetórias vai aumentando, começa-se a desenhar uma distribuição de preços do ativo subjacente na data de vencimento da opção. Para um número de trajetórias suficientemente grande para que se obtenha a convergência dos resultados, o valor presente do *payoff* de cada trajetória determinará então o prêmio da opção analisada.

Porém, para avaliação de opções de troca e opções sobre spread européias torna-se necessário considerar a correlação existente entre os ativos referenciados. Dessa forma, deve-se realizar a simulação conjunta das trajetórias de preços desses ativos.

Conforme visto, o *payoff* das opções de *spread* de compra é:

$$\text{Opções de } spread: \max[(S_2 - S_1) - X, 0] \quad (18)$$

As opções de troca são na verdade opções de *spread* com preço de exercício nulo. O *payoff* das opções de troca de compra é ³:

$$\text{Opções de troca: } \max(S_2 - S_1, 0) \quad (19)$$

Considerando uma taxa contínua de dividendos de q_1 e q_2 , distribuídos pelos ativos S_1 e S_2 , respectivamente, a trajetória de preços de cada ativo referenciado pode ser representada pelo processo estocástico a seguir:

$$dS_1 = (r - q_1)S_1 dt + \sigma_1 S_1 dZ_1 \quad (20)$$

$$dS_2 = (r - q_2)S_2 dt + \sigma_2 S_2 dZ_2 \quad (21)$$

Onde dZ_1 e dZ_2 são processos de Wiener com correlação instantânea $\rho_{1,2}$:

$$dZ_1 dZ_2 = \rho_{1,2} dt \quad (22)$$

Assim, o ponto adicional que precisa ser considerado para aplicação do Método de Simulação de Monte Carlo para avaliação das opções de troca e opções de *spread* é a simulação conjunta dos processos estocásticos apresentados nas equações 20 e 21. Para tanto, a partir da matriz de covariâncias correspondente a duas variáveis com distribuição normal padronizada e correlação $\rho_{1,2}$, deve-se então utilizar a fatoração de Cholesky para encontrar a única matriz triangular superior L tal que $\Sigma = L'L$:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} \\ \rho_{1,2} & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

³ Tanto no caso das opções de spread quanto no caso das opções de troca, o *payoff* das opções de venda são obtidos a partir das inversões dos sinais de S_1 , S_2 e X apresentados no *payoff* das opções de compra.

Pode-se verificar que a partir da multiplicação entre a matriz L abaixo por sua transposta, obtém-se a matriz apresentada na equação 23. Assim, a matriz L é o fator de Cholesky para Σ :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} \\ 0 & \sqrt{1 - \rho_{1,2}^2} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Considerando um vetor com n variáveis aleatórias independentes com distribuição normal padrão:

$$Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)' \quad (25)$$

O vetor de variáveis aleatórias correlacionadas $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)'$ é então obtido por:

$$\varepsilon = L'Z \quad (26)$$

Assim, para simulação de duas variáveis aleatórias correlacionadas ($n = 2$):

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)' \text{ e } Z = (Z_1, Z_2)' \quad (27)$$

Dessa forma, para se simular dois processos de Wiener correlacionados e traçar a trajetória de preços dos ativos S_1 e S_2 , o primeiro passo é gerar duas variáveis independentes Z_1 e Z_2 com distribuição normal padronizada. Em seguida, deve-se então substituir as variáveis ε_1 e ε_2 descritas a seguir na equação 17. Assim, a trajetória de S_1 é obtida com base em ε_1 , e a trajetória de S_2 é obtida com base em ε_2 , definidos conforme a seguir:

$$\varepsilon_1 = Z_1 \quad (28)$$

$$\varepsilon_2 = \rho_{1,2}Z_1 + \sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}Z_2 \quad (29)$$

Cabe destacar que a única distinção entre a metodologia utilizada para avaliação de opções de troca e aquela utilizada para avaliação de opções sobre *spread* é o critério de definição do *payoff* no vencimento, conforme definido nas equações 18 e 19.

3.2 Aplicação do Modelo

Para avaliação do modelo desenvolvido com base em Simulações de Monte Carlo, considera-se aqui sua aplicação para estimativa de preços de opções de troca e opções de *spread* européias baseadas em pares específicos de ações. Assim, serão analisadas opções com referência em ações ordinárias e preferenciais de emissão de uma mesma empresa, além de opções com referência em ações preferenciais de duas empresas distintas pertencentes a um mesmo setor. O julgamento da acurácia do modelo é então realizado a partir da comparação dos prêmios estimados com aqueles obtidos por meio da aplicação das fórmulas de Margrabe (1978) (no caso de opções de troca) e Kirk (1995) (no caso de opções de *spread*), ambas apresentadas no Anexo 1.

Conforme comentado, essas opções produziriam efeitos equivalentes à compra e venda no mercado a vista das ações referenciadas na opção, mas com custos potencialmente menores, já que deixaria de haver a necessidade de posse ou aluguel das ações, bem como de troca física das mesmas, já que o *payoff* da opção poderia ser pago por diferença. Além disso, esse instrumento permitiria maior alavancagem aos participantes, facilitando a realização tanto de *hedges* quanto de apostas em movimentos relativos favoráveis. Outro ponto positivo das opções é que os prejuízos, no caso de um movimento adverso de preços, estariam limitados ao prêmio.

Dessa forma, serão estudadas aqui opções de troca e opções de *spread* entre ações ordinárias e preferenciais da Petrobrás (códigos PETR3 e PETR4, respectivamente), do banco Bradesco (códigos BBDC3 e BBDC4, respectivamente) e da Vale do Rio Doce (códigos VALE3 e VALE5, respectivamente), bem como opções de troca e opções de *spread* entre ações preferenciais da Petrobrás e da Ipiranga (códigos PETR4 e PTIP4, respectivamente), entre ações preferenciais do Bradesco e do Itaú (códigos ITAU4 e BBDC4, respectivamente) e entre ações preferenciais da Usiminas e da Acesita (códigos USIM5 e ACES4, respectivamente). A tabela 1 apresenta os dados utilizados referentes às ações consideradas.

Setor	Empresa	Código	Tipo de ação	Preços de fechamento (25-07-2007)	Desvio-padrão anualizado	Desvio-padrão (0,1 dia)
Petróleo	Petrobrás	PETR3	ordinária	63,40	2,156 %	0,6817 %
		PETR4	preferencial	54,74	2,022 %	0,6394 %
Petróleo	Ipiranga	PTIP4	preferencial	25,75	2,971 %	0,9395 %
Bancário	Banco Bradesco	BBDC3	ordinária	52,45	2,478 %	0,7836 %
		BBDC4	preferencial	51,48	2,056 %	0,6501 %
Bancário	Banco Itaú	ITAU4	preferencial	90,00	2,119 %	0,6702 %
Mineração	Cia. Vale do Rio Doce	VALE3	ordinária	95,00	2,981 %	0,9427 %
		VALE5	preferencial	81,15	2,830 %	0,8949 %
Siderúrgico	Usiminas	USIM5	preferencial	115,00	2,964 %	0,9374 %
Siderúrgico	Acesita	ACES4	preferencial	73,10	1,980 %	0,6262 %

Tabela 1 – Dados das ações analisadas

Os *payoffs* das opções de troca são definidos pela diferença de preços entre as ações subjacentes. Assim, os *payoffs* de cada opção de troca em questão são: $\max(\text{PETR3} - \text{PETR4}, 0)$, $\max(\text{BBDC3} - \text{BBDC4}, 0)$, $\max(\text{VALE3} - \text{VALE5}, 0)$, $\max(\text{PETR4} - \text{PTIP4}, 0)$, $\max(\text{ITAU4} - \text{BBDC4}, 0)$, $\max(\text{USIM5} - \text{ACES4}, 0)$.

Já o *payoff* das opções de *spread* considera ainda a subtração de um montante, que foi adotado no trabalho como sendo igual à diferença de preços entre as ações verificada no dia 25 de julho de 2007. Assim, a partir dos preços de fechamento mostrados na tabela 1, os *payoffs* de cada opção de *spread* em questão são: $\max(\text{PETR3} - \text{PETR4} - 8,66, 0)$, $\max(\text{BBDC3} - \text{BBDC4} - 0,97, 0)$, $\max(\text{VALE3} - \text{VALE5} - 13,85, 0)$, $\max(\text{PETR4} - \text{PTIP4} - 28,99, 0)$, $\max(\text{ITAU4} - \text{BBDC4} - 38,52, 0)$ e $\max(\text{USIM5} - \text{ACES4} - 41,9, 0)$.

Além das informações descritas acima, os demais parâmetros de entrada utilizados para aplicação do modelo são:

- Número de dias úteis até o vencimento das opções é de 66 dias. A discretização do tempo realizada nos dois modelos foi de 0,1 dias.
- A taxa de juros livre de risco utilizada foi de 0,901476% em termos mensais, equivalente a taxa CDI (certificado de depósito interfinanceiro) do mês de junho de 2007, ou 0,002992% no período de 0,1 dias (capitalização contínua).
- A volatilidade foi estimada a partir dos desvios padrão dos retornos logaritmos históricos observados por cada ação subjacente entre os dias 15/06/2006 a 15/06/2007. A tabela 1 mostra os desvios-padrão anuais e no período de 0,1 dias estimados para cada uma das ações referenciadas.

- Já a correlação entre as ações referenciadas em cada derivativo, considerando os retornos logaritmos históricos observados por cada ação entre os dias 15/06/2006 a 15/06/2007, são: PETR3 e PETR4 (0,99), BBDC3 e BBDC4 (0,98), VALE3 e VALE5 (0,99), PETR4 e PTIP4 (0,84), ITAU4 e BBDC4 (0,97), USIM5 e ACES4 (0,78).
- Número de Simulações de Monte Carlo em cada experimento⁴: 10.000 simulações

A tabela 2 apresenta a comparação dos resultados encontrados pelo modelo de Simulação de Monte Carlo e pelo modelo de Margrabe (1978), considerando cada opção de troca estudada, além da correlação entre os ativos referenciados em cada opção. Pode-se notar uma boa aderência entre os resultados apresentados pelos dois modelos. O Erro Quadrático Médio (EQM) foi obtido a partir dos prêmios obtidos em cada um dos 20 experimentos de 10.000 simulações realizados e daquele gerado pela fórmula de Margrabe.

	PETR3 e PETR4	BBDC3 e BBDC4	VALE3 e VALE5	PETR4 e PTIP4	ITAU4 e BBDC4	USIM5 e ACES4
Margrabe (M)	8,660	1,597	13,850	28,990	38,520	41,905
Monte Carlo (MC)	8,661	1,596	13,848	28,988	38,520	41,894
(M-MC)/M	0,01%	-0,06%	-0,01%	-0,01%	0,00%	-0,03%
EQM	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Tabela 2 - Avaliação de Opções de Troca Europeias

A tabela 3 apresenta a comparação dos resultados encontrados pelo modelo de Simulação de Monte Carlo e pelo modelo de Kirk (1995), considerando cada opção de *spread* estudada. Pode-se notar novamente uma boa aderência entre os resultados produzidos pelos dois modelos, sendo que o modelo de Simulação de Monte Carlo tendeu a gerar resultados sensivelmente maiores do que aqueles gerados pelo modelo de Kirk (1995), sendo a maior discrepância observada de apenas 0,94%, referente à avaliação da opção de *spread* sobre as ações ITAU4 e BBDC4. O Erro Quadrático Médio (EQM) foi obtido a partir dos prêmios obtidos em cada um dos 20 experimentos de 10.000 simulações realizados e daquele gerado pela fórmula de Kirk.

⁴ Para obtenção de cada preço estimado para das opções analisadas foram realizados vinte experimentos de 10.000 simulações, obtendo-se a média dos preços gerados nos experimentos.

	PETR3 e PETR4	BBDC3 e BBDC4	VALE3 e VALE5	PETR4 e PTIP4	ITAU4 e BBDC4	USIM5 e ACES4
Kirk (K)	1,088	1,098	2,205	3,205	3,303	8,269
Monte Carlo (MC)	1,091	1,098	2,210	3,225	3,334	8,309
(K-MC)/K	0,28%	0,00%	0,23%	0,62%	0,94%	0,48%
EQM	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Tabela 3 - Avaliação de Opções de *Spread* Europeias

Conforme visto, as opções de troca são na verdade opções de *spread* com preço de exercício nulo. Assim, a tabela 4 apresenta uma comparação dos resultados referentes à avaliação das opções de troca, mostrados na tabela 2, com os resultados gerados pelos modelos de Monte Carlo e Kirk (1995) considerando as mesmas opções de *spread* avaliadas anteriormente, mas com preços de exercício iguais a 0,01, ou seja, bem próximos de zero. Por conseguinte, uma avaliação coerente das opções de *spread* deve gerar valores para as mesmas aproximadamente iguais aos valores estimados para as opções de troca. Conforme se pode notar na tabela 4, esse comportamento é verificado em todos os resultados dos modelos de Simulação de Monte Carlo aplicado à avaliação das opções de *spread*. Por outro lado, o modelo de Kirk (1995) apresentou resultados aparentemente inconsistentes. Cabe destacar que, conforme comentado anteriormente, a única alteração no modelo de Simulação de Monte Carlo para avaliação de opções de *spread* em relação aquele utilizado para avaliação de opções de troca refere-se ao *payoff* na data de exercício, o que também sugere que o problema na avaliação das opções de *spread* em questão está no modelo de Kirk (1995), que tende a subestimar o valor da opção.

	PETR3 e PETR4	BBDC3 e BBDC4	VALE3 e VALE5	PETR4 e PTIP4	ITAU4 e BBDC4	USIM5 e ACES4
Margrabe (OT)	8,660	1,597	13,850	28,990	38,520	41,905
Monte Carlo (OT)	8,661	1,596	13,848	28,988	38,520	41,894
Kirk (OS)	5,401	1,519	8,930	23,365	28,164	32,578
Monte Carlo (OS)	8,649	1,589	13,833	28,981	38,516	41,890

Tabela 4 - Avaliação de Opções (OT) de troca e Opções de *Spread* (OS) europeias com preço de exercício próximo a zero

3.2.1 Análise de sensibilidade

Podem ser realizadas mudanças em determinados parâmetros dos modelos de forma a verificar a sensibilidade do prêmio da opção frente à variável alterada. Nesse item são realizados estudos do comportamento dos preços das opções de troca e das opções de *spread* européias frente a mudanças na volatilidade dos ativos subjacentes, na correlação entre os mesmos e na taxa de juros livre de risco. Obviamente, pode-se analisar a sensibilidade do prêmio dessas opções frente a mudanças em outros parâmetros, como o prazo até o vencimento e, no caso de opções de *spread*, o preço de exercício.

Dessa forma, a partir do Modelo de Simulação de Monte Carlo e da fórmula de Margrabe (1978), a tabela 5 apresenta a análise do comportamento do preço da opção européia de troca de ações ordinárias por ações preferenciais da Petrobrás (códigos PETR3 e PETR4, respectivamente) frente à redução de 30% na correlação (de 0,99 para 0,69), ao aumento de 50% na volatilidade diária da PETR3 (de 2,16% para 3,23%) e da PETR4 (de 2,02% para 3,03%) e ao aumento de 50% na taxa de juros livre de risco (de 0,9015% ao mês para 1,3522%).

Os resultados apresentados por cada modelo são semelhantes. Conforme se pode notar, o preço da opção reagiu positivamente à redução na correlação e ao aumento na volatilidade dos ativos subjacentes. Esse comportamento era esperado, já que as duas mudanças em questão aumentam as chances de ocorrência de maiores diferenças entre os preços da PETR3 e da PETR4 no vencimento da opção, o que eleva a expectativa de valor do *payoff* da mesma. Já a mudança na taxa de juros livre de risco apresentou pouca influência sobre o preço da opção, apesar de ter provocado alguma redução em seu valor. Esse fato pode parecer estranho em um primeiro momento, já que, conforme se sabe, a taxa de juros livre de risco afeta positivamente o prêmio de uma opção de compra *vanilla*.⁵ O efeito praticamente nulo da taxa de juros sobre as opções de troca ocorre em função da característica do *payoff* dessas opções. Enquanto que em uma opção de compra *vanilla* o *payoff* é definido pela diferença entre o preço do ativo subjacente e do preço de exercício, que é representado por um montante fixo, o *payoff* da opção de troca é definido pela diferença entre o preço de dois ativos subjacentes.

⁵ Quanto maior a taxa de juros livre de risco, menor será o valor presente do preço de exercício. Uma vez que o preço de exercício representa uma possível despesa para o titular da opção de compra *vanilla*, este estará em melhor situação quando a taxa de juros for maior.

Assim, no mundo neutro ao risco, o valor esperado de cada ativo subjacente aumenta proporcionalmente na medida em que a taxa de juros sobe (e a diferença entre esses preços também), a ponto de anular o efeito negativo sobre o preço da opção resultante do aumento da taxa de desconto utilizada no cálculo do valor presente do fluxo de caixa da mesma.

	Monte Carlo	Margrabe
<u>Cenário Base</u>	8,6612	8,6600
Redução de 30% na correlação	9.1902	9.1968
Aumento de 50% na Volatilidade da PETR3	8.8701	8.8676
Aumento de 50% na Volatilidade da PETR5	8.7095	8.7045
Aumento de 50% na taxa de juros livre de risco	8.6600	8.6586

Tabela 5 - Sensibilidade do Preço da Opção de Troca Européia (PETR3 e PETR4)

Em complemento a análise apresentada na tabela 5, a partir da fórmula de Margrabe (1978), estimou-se os valores da mesma opção de troca analisada considerando diferentes níveis de volatilidade da PETR3 e da PETR4, apresentando-se os resultados no primeiro gráfico da figura 1. Conforme se pode notar, o valor da opção é maior na medida em que a volatilidade entre os ativos subjacentes é diferente, sendo que os menores valores da opção são observados quando as volatilidades de cada ativo subjacente são iguais. Essa é uma constatação interessante. Como a correlação entre a PETR3 e PETR4 é alta, no valor de 0,99, quando a volatilidade das mesmas é parecida a possibilidade de haver um descolamento do valor das mesmas no vencimento é menor, reduzindo a estimativa de valor para a opção.

Ainda em relação à figura 1, a análise apresentada no segundo gráfico refere-se ao comportamento do preço da opção de troca em questão frente a mudanças no coeficiente de correlação entre a PETR3 e PETR4 e diferentes níveis de taxa de juros, considerando-se novamente a aplicação da fórmula de Margrabe (1978). Conforme pode ser verificado, no que se refere às mudanças no coeficiente de correlação, as mudanças nos prêmios condizem com a intuição econômica, isto é, prêmios inversamente proporcionais à correlação entre as duas ações referenciadas. Já no que se refere às mudanças na taxa de juros, pode-se notar que o valor da opção de troca praticamente não apresenta sensibilidade, o que está em linha com os resultados da tabela 5.

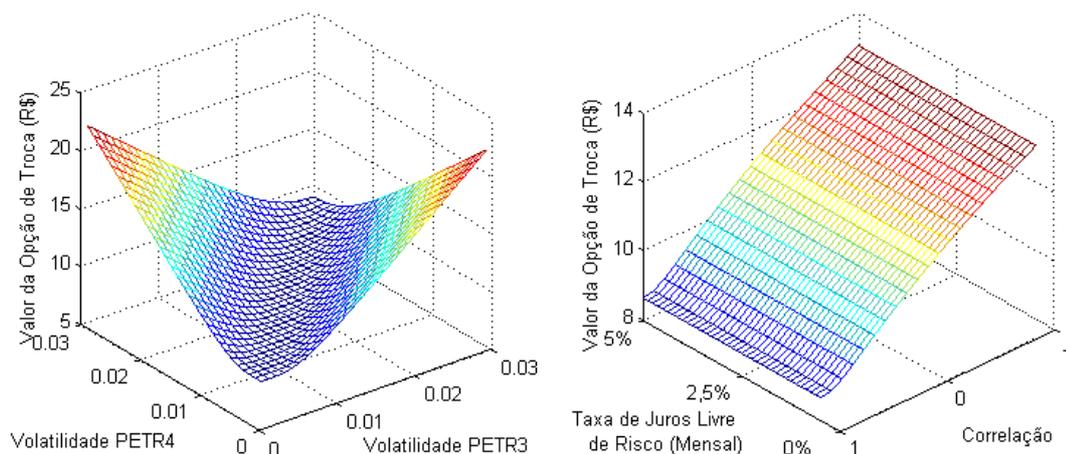


Figura 1 – Sensibilidade do Valor da Opção de Troca Frente a Mudanças na Volatilidade dos Ativos Subjacentes e Frente a Mudanças na Taxa de Juros Livre de Risco e na Correlação Entre os Ativos Subjacentes

A partir do Modelo de Simulação de Monte Carlo e da fórmula de Kirk (1995), a tabela 6 apresenta a análise de sensibilidade do valor da opção de *spread* européia lançada sobre as ações PETR3 e PETR4 frente às mesmas mudanças aplicadas anteriormente sobre os parâmetros de avaliação da opção de troca lançada sobre essas mesmas ações.

Os resultados apresentados por cada modelo também são semelhantes. Conforme se pode notar, o preço da opção reagiu positivamente à redução na correlação e ao aumento na volatilidade dos ativos subjacentes. Entretanto, além da mudança na correlação ter influenciado mais fortemente o preço da opção de *spread* em relação ao preço da opção de troca, o efeito gerado pelo aumento da volatilidade da PETR3 foi consideravelmente maior do que aquele produzido pelo aumento da volatilidade da PETR4. Esse comportamento ocorre em função da diferença entre os preços iniciais dos ativos subjacentes, além da subtração do preço de exercício no *payoff* das opções de *spread*.

Em relação à mudança na taxa de juros, pode-se notar que, ao contrário do que ocorre com as opções de troca, a opção de *spread* apresentou forte sensibilidade, reagindo positivamente aos aumentos na mesma. Conforme citado, no mundo neutro ao risco, o valor esperado de cada ativo subjacente (e a diferença entre esses preços também) aumenta proporcionalmente na medida em que a taxa de juros sobe. Porém, se nas opções de troca esse fato anula o efeito negativo sobre o preço da opção do aumento

na taxa de desconto dos fluxos de caixa utilizada no cálculo do seu valor presente, o mesmo não ocorre com as opções de *spread*. Nestas, mesmo que a diferença entre os preços dos ativos subjacentes aumente na mesma proporção que em uma opção de troca, esse efeito exerce impacto positivo sobre o preço da opção de *spread* por tornar relativamente menor o preço de exercício, que aparece com sinal negativo no *payoff*.

	Monte Carlo	Kirk
<u>Cenário Base</u>	1,091	1,088
Redução de 30% na correlação	3.3078	3.3067
Aumento de 50% na Volatilidade da PETR3	3,1990	3,1959
Aumento de 50% na Volatilidade da PETR5	1,2801	1,2690
Aumento de 50% na taxa de juros livre de risco	1,1300	1,1250

Tabela 6 - Sensibilidade do Preço da Opção de *Spread* Européia (PETR3 e PETR4)

Em complemento a análise apresentada na tabela 6, a partir da fórmula de Kirk (1995), estimou-se os valores da mesma opção de *spread* analisada considerando diferentes níveis de volatilidade da PETR3 e da PETR4, apresentando-se os resultados no primeiro gráfico da figura 2. Um fato interessante a se notar é que não há a simetria verificada no mesmo gráfico referente às opções de troca (figura 1), o que ocorre em função da diferença entre os preços iniciais dessas ações e da subtração do *payoff* das opções de *spread*, conforme citado.

Ainda em relação à figura 2, a análise apresentada no segundo gráfico refere-se ao comportamento do preço da opção de *spread* em questão frente a mudanças no coeficiente de correlação entre a PETR3 e PETR4 e na taxa de juros livre de risco, considerando-se novamente a aplicação da fórmula de Kirk (1995). Conforme pode ser verificado, no que se refere às mudanças no coeficiente de correlação, pode-se notar novamente prêmios inversamente proporcionais ao valor desse parâmetro. Porém, ao contrário do que ocorre com as opções de troca, as opções de *spread* apresentam sensibilidade a mudanças na taxa de juros, pelos motivos descritos anteriormente.

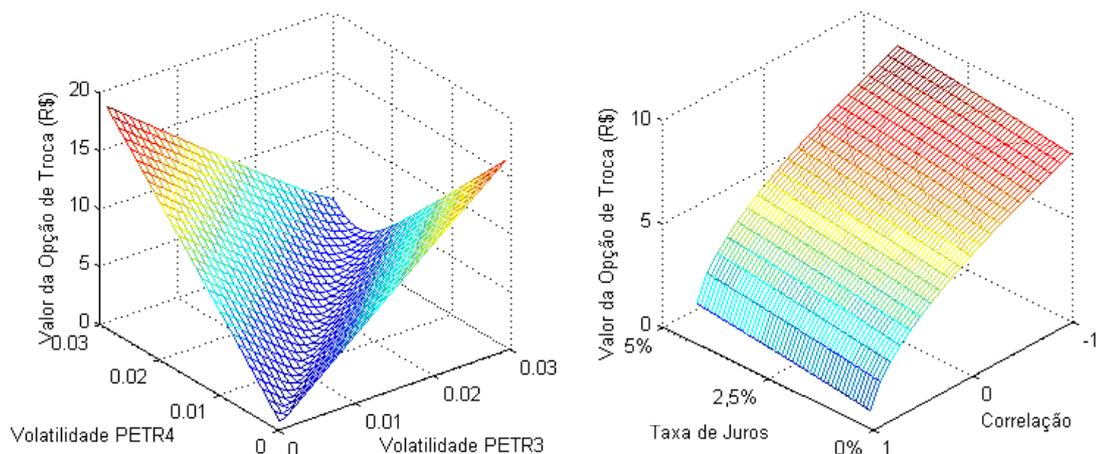


Figura 2 – Sensibilidade do Valor da Opção de *Spread* Frente a Mudanças na Volatilidade dos Ativos Subjacentes e Frente a Mudanças na Taxa de Juros Livre de Risco e na Correlação Entre os Ativos Subjacentes

4. Avaliação de Opções de Troca e Opções de Spread Americanas por Pirâmides Binomiais e Mínimos Quadrados de Monte Carlo

Esse item trata do apreçamento de opções de troca e opções de *spread* americanas por meio de pirâmides binomiais e do método Mínimos Quadrados de Monte Carlo. No que se refere aos modelos baseados em pirâmides binomiais, será considerada especificamente a aplicação dos modelos de Rubinstein (1994) - que incorpora a correlação entre os ativos subjacentes a partir da definição dos retornos possíveis de cada ativo - e Brandimarte (2006) - em que a incorporação da correlação entre os ativos subjacentes ocorre a partir da definição das probabilidades de cada movimento de preços dos ativos. Assim, após a apresentação dos três modelos em questão, realiza-se a aplicação dos mesmos e a comparação dos resultados encontrados por cada um.

4.1 Descrição do Modelo Lattice piramidal de Rubinstein

O primeiro passo para definição do modelo de Rubinstein é a padronização dos preços iniciais dos ativos subjacentes no par (1,1). Em seguida, da mesma forma que os movimentos de alta ou baixa de um único ativo representados na árvore binomial padrão utilizada no apreçamento de opções *vanilla*, na pirâmide binomial de Rubinstein também se assume que o movimento inicial do primeiro ativo subjacente - ativo 1 - é representado

por dois retornos específicos, d ou u . Adicionalmente, as probabilidades dos retornos d ou u no modelo de Rubinstein são consideradas iguais, ou seja, assumem o valor de 50%. Simultaneamente, se o retorno do ativo 1 é u , assume-se que o segundo ativo - ativo 2 - apresenta dois retornos possíveis, A ou B , com probabilidades iguais. Por outro lado, se o retorno do ativo 1 é d , considera-se que o ativo 2 pode apresentar os retornos possíveis C ou D , também com probabilidades iguais. É importante destacar que a escolha dos retornos possíveis do ativo 2 ocorre de forma que $AD = BC$, o que se torna fundamental para que haja o cruzamento de diversas trajetórias de preços iniciadas de forma distinta.

A Figura 3 representa o primeiro movimento de preços dos dois ativos subjacentes, indicando o par inicial $(1,1)$, podendo se mover para (u,A) , (u,B) , (d,C) ou (d,D) , cada movimento com probabilidade de 25%.

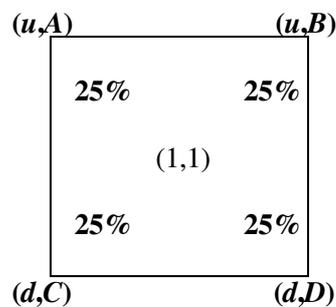


Figura 3: Primeiro movimento de preços

Conforme citado, o modelo de Rubinstein (1994) incorpora a correlação entre os ativos subjacentes a partir da definição de seus retornos possíveis. É claro que para contemplar um coeficiente de correlação diferente de zero, torna-se necessário que a realização do retorno inicial do primeiro ativo modifique os retornos possíveis (ou as probabilidades de retorno) do segundo ativo. Nessa linha, para se assumir correlação diferente de zero na pirâmide binomial deve-se adotar $A \neq C$ e $B \neq D$. Para exemplificar esse fato, suponha-se que $A = C$ e $B = D$. Nesse caso, pode-se verificar que se o primeiro ativo se move para cima ou para baixo, os movimentos possíveis do segundo ativo e suas respectivas probabilidades de ocorrência mantêm-se exatamente iguais, indicando correlação nula entre os ativos. Sabe-se que se o ativo 1 se move para cima, o movimento do ativo 2 será A ou B , com probabilidade de 25% cada. Por outro lado, se o ativo 1 se move para baixo, o movimento do ativo 2 será C ou D , também com probabilidade de

25%. Considerando $A = C$ e $B = D$, os movimentos de A ou B com probabilidades de 25% e de C ou D com probabilidades de 25% são equivalentes.

A figura 4 representa o segundo movimento de preços dos dois ativos subjacentes. Por exemplo, dado que o primeiro retorno foi (u,A) , então o segundo retorno pode ser novamente (u,A) , (u,B) , (d,C) ou (d,D) . Por conseguinte, o retorno total dos primeiros dois movimentos de preços dos dois ativos subjacentes será (u^2, A^2) , (u^2, AB) , (ud, AC) ou (ud, AD) , cada um com probabilidade $25\% \times 25\% = 6,25\%$.

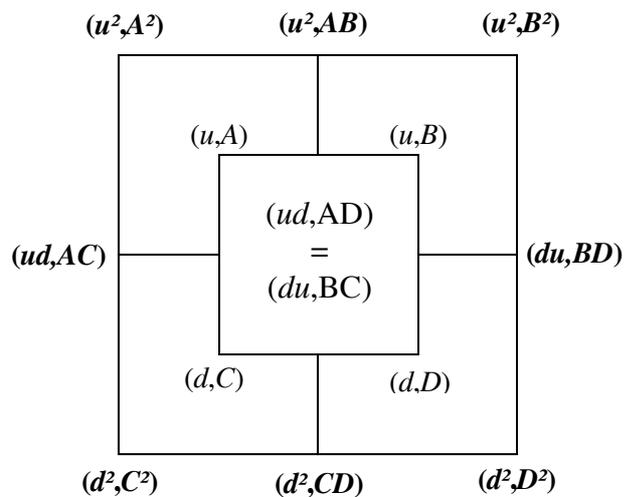


Figura 4: Segundo movimento de preços

Com essa estrutura, algumas trajetórias levam ao mesmo nó. Por exemplo, a trajetória $(1,1) \Rightarrow (u, A) \Rightarrow (u, B)$ e $(1,1) \Rightarrow (u, B) \Rightarrow (u, A)$ levam ao mesmo nó (u^2, AB) após o segundo movimento, de modo que a probabilidade de se chegar a esse nó é $6,25\% + 6,25\% = 12,5\%$. Dessa forma, conforme mostra a figura 4, quatro nós alcançam um nó central da pirâmide a partir da premissa $AD = BC$. Assim, a probabilidade total de cada nó é 25%.

Seguindo o mesmo procedimento, iniciando-se dos nove nós referentes ao segundo movimento de preços representados por X, a figura 5 apresenta os possíveis nós ao final do terceiro movimento de preços.

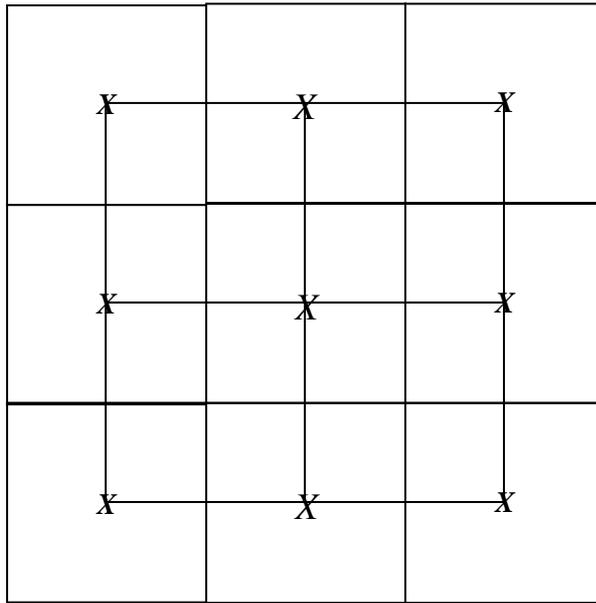


Figura 5: Terceiro movimento de preços

Pode-se notar que se são contemplados n movimentos de preço, então o número total de nós distintos será $(1 + n)^2$. Assim, após desenhar as Figuras 3 a 5, continuando as trajetórias dos movimentos dos ativos subjacentes, pode-se imaginar a representação dos movimentos possíveis dos dois ativos subjacentes como um corte horizontal de uma pirâmide quadrada, com (1,1) no topo da pirâmide e o último movimento de preços na base, conforme apresentado na figura 6.

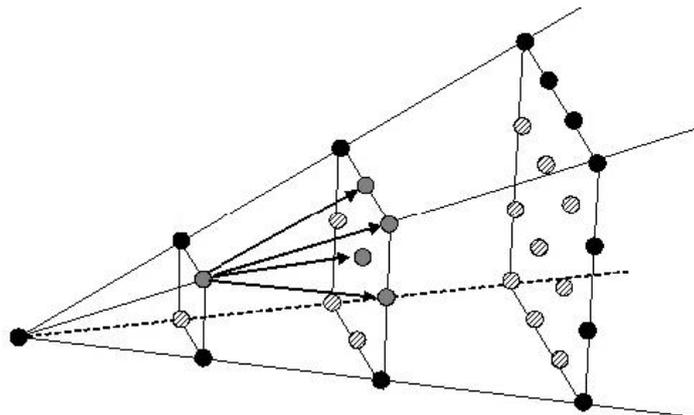
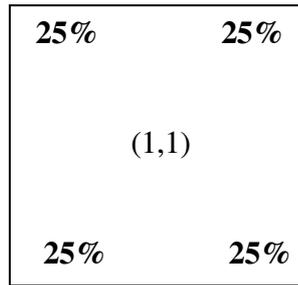


Figura 6: Representação da pirâmide binomial

Supondo que se queira replicar a estrutura de um movimento do ponto (1,1) para (x,y) , com coeficiente de correlação ρ entre os retornos dos dois ativos, médias dos

retornos logarítmicos $(\mu_1 h, \mu_2 h)$ e desvio-padrão $(\sigma_1 \sqrt{h}, \sigma_2 \sqrt{h})$, onde t é o tempo até o vencimento da opção, n é o número de movimentos na pirâmide, e $h = t/n$ é o tempo entre cada movimento de preços na pirâmide, chega-se ao movimento binomial bivariado multiplicativo representado na Figura 7.⁶

$$\begin{array}{cc} (\exp\{\mu_1 h + \sigma_1 \sqrt{h}\}, & (\exp\{\mu_1 h + \sigma_1 \sqrt{h}\}, \\ \exp\{\mu_2 h + \sigma_2 \sqrt{h}[\rho + \sqrt{1 - \rho^2}]\}) & \exp\{\mu_2 h + \sigma_2 \sqrt{h}[\rho - \sqrt{1 - \rho^2}]\}) \end{array}$$



$$\begin{array}{cc} (\exp\{\mu_1 h - \sigma_1 \sqrt{h}\}, & (\exp\{\mu_1 h - \sigma_1 \sqrt{h}\}, \\ \exp\{\mu_2 h - \sigma_2 \sqrt{h}[\rho - \sqrt{1 - \rho^2}]\}) & \exp\{\mu_2 h - \sigma_2 \sqrt{h}[\rho + \sqrt{1 - \rho^2}]\}) \end{array}$$

Figura 7: Terceiro movimento de preços

Em adição, assumindo o mundo neutro ao risco tal como no modelo binomial unidimensional, pode-se escrever as médias dos retornos logaritmos conforme apresentado nas equações 30 e 31:

$$\mu_1 = (\log r / d_1) - \frac{1}{2} \sigma_1^2 \tag{30}$$

$$\mu_2 = (\log r / d_2) - \frac{1}{2} \sigma_2^2 \tag{31}$$

Onde d_1 e d_2 são definidos como um mais a taxa de dividendos em termos anuais dos ativos 1 e 2, respectivamente, e r é a taxa de juros livre de risco.

⁶ Para maiores detalhes ver Rubinstein [15.2].

Dessa forma, a partir dos valores correntes dos ativos 1 e 2, da taxa de juros livre de risco (r), do desvio padrão do retorno do ativos 1 (σ_1), do desvio padrão do retorno do ativos 2 (σ_2), da correlação entre os retornos dos ativos 1 e 2 (ρ), e do número de movimentos da pirâmide (n), tem-se:

$$u = \exp(\mu_1 h + \sigma_1 \sqrt{h}) \quad (32)$$

$$d = \exp(\mu_1 h - \sigma_1 \sqrt{h}) \quad (33)$$

$$A = \exp\{\mu_2 h + \sigma_2 \sqrt{h}[\rho + \sqrt{(1 - \rho^2)}]\} \quad (34)$$

$$B = \exp\{\mu_2 h + \sigma_2 \sqrt{h}[\rho - \sqrt{(1 - \rho^2)}]\} \quad (35)$$

$$C = \exp\{\mu_2 h - \sigma_2 \sqrt{h}[\rho - \sqrt{(1 - \rho^2)}]\} \quad (36)$$

$$D = \exp\{\mu_2 h - \sigma_2 \sqrt{h}[\rho + \sqrt{(1 - \rho^2)}]\} \quad (37)$$

Assim, as definições de (u, d) e (A, B, C, D) podem ser usadas para construção dos movimentos da pirâmide binomial. Iniciando-se da base da pirâmide, o valor da opção pode ser obtido recursivamente, descontando-se 4 nós em 1 em cada movimento, até que se chegue ao topo da pirâmide.

4.2 Descrição do Modelo *Lattice* piramidal de Brandimarte

Enquanto o modelo de Rubinstein (1994) considera a correlação entre os ativos subjacentes a partir da definição dos retornos possíveis de cada ativo, o modelo proposto por Brandimarte (2006) incorpora a correlação entre os ativos subjacentes a partir da definição das probabilidades de cada movimento de preços, conforme descrito a seguir.

Considerando uma taxa contínua de dividendos de q_1 e q_2 , distribuídos pelos ativos S_1 e S_2 , respectivamente, a trajetória de preços de cada ativo referenciado pode

ser representada pelos processos estocásticos apresentados nas equações 20 e 21, reproduzidas aqui por questões didáticas:

$$dS_1 = (r - q_1)S_1 dt + \sigma_1 S_1 dZ_1 \quad (38)$$

$$dS_2 = (r - q_2)S_2 dt + \sigma_2 S_2 dZ_2 \quad (39)$$

Onde dZ_1 e dZ_2 são processos de Wiener com correlação instantânea $\rho_{1,2}$:

$$dZ_1 dZ_2 = \rho_{1,2} dt \quad (40)$$

Assim, para $x_i = \log S_i$ ($i = 1, 2$), tem-se os seguintes processos estocásticos:

$$dX_1 = v_1 S_1 dt + \sigma_1 dZ_1 \quad (41)$$

$$dX_2 = v_2 S_2 dt + \sigma_2 dZ_2 \quad (42)$$

$$\text{Onde } v_i = r - q_i - \frac{\sigma_i^2}{2}, i = 1, 2. \quad (43)$$

No modelo de Brandimarte (2006), tal como em uma árvore binomial típica, assume-se que ambos os ativos subjacentes podem subir ou cair em um montante fixo δx_i , em termos de logaritmo do preço. Da mesma forma que o modelo de Rubinstein (1994), no modelo de Brandimarte (2006) pode haver quatro movimentos a partir de cada nó da árvore. Assim, torna-se necessário definir quatro probabilidades distintas: p_{uu} (probabilidade de alta nos dois ativos subjacentes), p_{ud} (probabilidade de alta no primeiro ativo e queda no segundo), p_{du} (probabilidade de queda no primeiro ativo e alta no segundo) e p_{dd} (probabilidade de queda nos dois ativos subjacentes).

A calibragem da árvore a partir da definição das probabilidades de cada movimento de preços é realizada com base nas definições dos dois primeiros momentos implícitos nas equações 41 e 42, bem como da covariância entre os dois ativos

subjacentes. Assim, chega-se as seguintes definições de δx_1 e δx_2 , onde δt representa o intervalo de tempo discretizado:

$$\delta x_1 = \sigma_1 \sqrt{\delta t} \quad (44)$$

$$\delta x_2 = \sigma_2 \sqrt{\delta t} \quad (45)$$

Adicionalmente, obtém-se o seguinte sistema com quatro equações e quatro incógnitas:

$$p_{uu} + p_{ud} - p_{du} - p_{dd} = \frac{v_1 \sqrt{\delta t}}{\sigma_1} \quad (46)$$

$$p_{uu} - p_{ud} + p_{du} - p_{dd} = \frac{v_2 \sqrt{\delta t}}{\sigma_2} \quad (47)$$

$$p_{uu} - p_{ud} - p_{du} + p_{dd} = \rho_{1,2} \quad (48)$$

$$p_{uu} + p_{ud} + p_{du} + p_{dd} = 1 \quad (49)$$

A partir da solução do sistema composto pelas equações 46 a 49, chega-se então às equações que definem as probabilidades de cada movimento de preços possível:

$$p_{uu} = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \sqrt{\delta t} \left(\frac{\mu_1}{\sigma_1} + \frac{\mu_2}{\sigma_2} \right) + \rho_{1,2} \right\} \quad (50)$$

$$p_{ud} = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \sqrt{\delta t} \left(\frac{\mu_1}{\sigma_1} - \frac{\mu_2}{\sigma_2} \right) - \rho_{1,2} \right\} \quad (51)$$

$$p_{du} = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \sqrt{\delta t} \left(-\frac{\mu_1}{\sigma_1} + \frac{\mu_2}{\sigma_2} \right) - \rho_{1,2} \right\} \quad (52)$$

$$p_{dd} = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \sqrt{\delta t} \left(-\frac{\mu_1}{\sigma_1} - \frac{\mu_2}{\sigma_2} \right) + \rho_{1,2} \right\} \quad (53)$$

As probabilidades descritas nas equações 50 a 53 possuem uma interpretação intuitiva. A probabilidade de alta nos dois ativos subjacentes p_{uu} aumenta na medida em

que as médias μ_1 e μ_2 são maiores em relação às volatilidades e na medida em que a correlação aumenta. Já em relação à probabilidade de um movimento positivo em S_1 e de um movimento negativo em S_2 , a média μ_2 ocorre com sinal negativo (quanto maior o valor de μ_2 , menos provável o movimento negativo), e uma correlação negativa torna esse movimento conjunto mais provável. Uma consideração similar pode ser dada a p_{du} , enquanto p_{dd} é menor quando μ_1 e μ_2 são maiores e é maior quando a correlação é positiva.

Finalmente, como na árvore trabalha-se com preços, e não seus logaritmos, os movimentos de preços são dados por:

$$u_i = e^{\delta_i} = e^{\sigma_i \sqrt{\delta}} \quad (54)$$

e

$$d_i = \frac{1}{u_i}, i = 1, 2. \quad (55)$$

4.3. Descrição do Modelo Mínimos Quadrados de Monte Carlo (MQMC)

O Método dos Mínimos Quadrados de Monte Carlo (MQMC) foi desenvolvido originalmente por Longstaff e Schwartz (2001) para avaliação de opções *vanilla* americanas, tendo sido considerada também a avaliação de opções americanas bermuda asiáticas e de *swaps*. No que se refere à avaliação da opção americana *vanilla*, a estratégia de exercício por parte do titular é a mesma presente nos modelos *lattice*. A partir de simulações de Monte Carlo, o fluxo de caixa esperado da opção no mundo neutro ao risco é estimado com base na estratégia ótima do titular da opção descrita a seguir:

- O titular da opção deseja maximizar o valor da opção a qualquer instante, e considera o exercício antecipado sempre que o valor obtido nesse caso for maior do que a estimativa do valor da mesma caso mantida viva.

Deste modo, para tomada de decisão ótima, além do valor de exercício para cada instante de tempo e preço do ativo subjacente simulado, torna-se necessário conhecer o valor estimado da opção mantida viva em cada caso. A grande contribuição dos autores foi identificar que o valor da opção mantida viva poderia ser estimado a partir de informações obtidas na simulação usando o método dos mínimos quadrados ordinários. Nessa linha, a aplicação do método dos mínimos quadrados ordinários tem como resultado a definição de uma função específica, chamada de função de expectativa condicional, por meio do qual se obtém a estimativa dos valores da opção mantida viva. Cabe destacar que há a definição de uma função de expectativa condicional para cada instante de tempo entre a data anterior ao vencimento e a emissão.⁷

Após identificar a matriz de fluxo de caixa gerada a partir das decisões ótimas do titular da opção a cada instante de tempo - onde cada linha representa uma trajetória de preços e cada coluna um instante de tempo -, o valor da opção é então obtido descontando-se todos os fluxos a valor presente, e obtendo-se a média de todas as trajetórias.

4.3.1 Adaptação do método à avaliação de opções de troca e opções de *spread*

A principal adaptação realizada no método MQMC para avaliação de opções de troca e opções de *spread* ocorre em função da necessidade de simulação conjunta dos preços dos ativos subjacentes, conforme realizado no modelo apresentado na seção 3. Assim, serão geradas duas matrizes com as trajetórias simuladas de preços dos ativos 1 e 2, ao contrário do modelo original de Longstaff e Schwartz (2001), em que se considera apenas a simulação do preço de um único ativo subjacente.

A partir dessas matrizes, o primeiro passo é a obtenção do valor da opção no vencimento, representado pelo *payoff* da mesma, conforme definido nas equações 18 e

⁷ Em seu artigo, Longstaff e Schwartz utilizaram o método dos mínimos quadrados ordinários para estimar a função de expectativa condicional. Na aplicação considerada do método para avaliação de opções americanas *vanilla*, a variável dependente Y é regredida considerando uma constante, X e X^2 . Entretanto, de acordo com os próprios autores, em alguns casos pode ser mais eficiente usar outros métodos, como o método dos mínimos quadrados ponderados, o método dos mínimos quadrados generalizados, entre outras. No modelo desenvolvido no presente artigo, a variável dependente Y é regredida considerando uma constante, X_1 , X_1^2 , X_2 e X_2^2 . Não obstante, verificou-se que os resultados gerados não apresentaram sensibilidade relevante quando outras funções base foram utilizadas.

19. Assim, após a definição do valor da opção no vencimento considerando cada um dos pares de preço dos ativos subjacentes simulados conjuntamente, inicia-se então a avaliação recursiva do derivativo a partir da data anterior ao vencimento, T-1, em direção à data de emissão.

No instante T-1, caso a opção esteja *in-the-money*, o titular terá de decidir se irá exercê-la ou mantê-la viva. Conforme citado, as regressões realizadas no modelo estimam justamente o valor da opção caso seja mantida viva, o que permite a tomada de decisão ótima do titular a partir de sua comparação com o valor de exercício. Assim, o vetor com as duas variáveis independentes ($X_{1,T-1}$ e $X_{2,T-1}$) da primeira regressão realizada no modelo são representadas pelos valores dos ativos subjacentes no instante T-1 em cada uma das trajetórias simuladas, mas tomados somente os casos em que o derivativo em questão se encontra *in-the-money* nessa data.

Os valores para a opção no vencimento referentes a essas trajetórias são então descontados até a data anterior ao vencimento, T-1, à taxa de juros livre de risco. Esses valores descontados representam então a variável dependente Y_{T-1} da primeira regressão realizada no modelo, e o resultado será a função de expectativa condicional para o instante T-1, cujo objetivo é estimar o valor de continuação da opção no instante em questão. O valor da opção na data anterior ao vencimento será então obtido a partir do seguinte procedimento:

Substituindo-se na função de expectativa condicional cada um dos pares de preços dos ativos subjacentes simulados conjuntamente, observados em T-1, compara-se o resultado encontrado com o valor de exercício da opção referente ao instante em questão. Com base na estratégia do titular da opção definida anteriormente, o valor do derivativo será igual ao valor de exercício, caso o valor de continuação seja inferior ao valor de exercício, ou zero, caso contrário.

A avaliação do derivativo continua então recursivamente. O passo seguinte é examinar o exercício ótimo no instante T-2, e o procedimento utilizado é semelhante ao aplicado no instante T-1. Assim, observando as matrizes que contém as trajetórias de preços dos ativos subjacentes, o vetor com as duas variáveis explicativas ($X_{1,T-2}$ e $X_{2,T-2}$) da segunda regressão realizada no modelo são representadas pelos valores dos ativos subjacentes em T-2, mas tomados somente os casos em que a opção está *in-the-money* nessa data. A variável Y_{T-2} explicada na regressão será definida novamente como o

valor descontado dos fluxos de caixa futuros do derivativo referentes a essas trajetórias - subsequentes ao instante T-2 -, desconsiderando a possibilidade de exercício da opção em T-2. Assim, como a opção só pode ser exercida uma única vez, os fluxos de caixa futuros poderão ocorrer em T-1 ou em T. Obviamente, os fluxos de caixa referentes ao instante T-1 deverão ser descontados por um período, e aqueles recebidos em T deverão ser descontados por dois períodos.

Após substituir na nova função de expectativa condicional cada um dos pares de preços dos ativos subjacentes simulados conjuntamente, observados em T-2, o passo seguinte é a comparação do resultado encontrado com o valor de exercício da opção referente ao instante em questão, conforme realizado para o instante T-1.

Esse procedimento deve ser então realizado recursivamente até o instante imediatamente seguinte à data de emissão. Após identificar a matriz de fluxo de caixa gerada a partir das decisões ótimas do investidor e do emissor, o valor do título será então obtido descontando-se todos os fluxos a valor presente, e obtendo-se a média de todas as trajetórias.

4.4 Aplicação dos Modelos

Para avaliação dos modelos desenvolvidos destinados à avaliação de opções de troca e opções de *spread* americanas, considera-se aqui a aplicação dos mesmos para estimativa de preços de opções americanas equivalentes às mesmas opções de troca e opções de *spread* européias estudadas anteriormente, porém, considerando a possibilidade de exercício antecipado. O dado adicional para aplicação dos três modelos utilizados refere-se à taxa de dividendos das ações subjacentes, que exercem influência direta sobre a possibilidade de exercício antecipado das opções em questão.⁸ As taxas de dividendos consideradas foram: PETR3 (3% a.a. ou 0,000821% no período de 0,1 dias), PETR4 (3,514% a.a. ou 0,000959% no período de 0,1 dias), BBDC3 (2,117% a.a. ou 0,000582% no período de 0,1 dias), BBDC4 (2,38% a.a. ou 0,000653% no período de 0,1 dias), VALE3 (1,421% a.a. ou 0,000392% no período de 0,1 dias), VALE5 (1,669% a.a. ou 0,000460% no período de 0,1 dias), PTIP4 (2,682% a.a. ou 0,000735% no período de 0,1 dias), ITAU4 (2,256% a.a. ou 0,000620% no período de 0,1 dias),

ACES4 (3,962% a.a. ou 0,001079% no período de 0,1 dias) e USIM5 (3,709% a.a. ou 0,001012% no período de 0,1 dias).⁹

As tabelas 7 e 8 apresentam os resultados encontrados para as opções de troca e opções de *spread*, respectivamente, a partir da aplicação dos modelos *lattice* de Rubinstein (1994) e Brandimarte (2006), além do modelo baseado no Método Mínimos Quadrados de Monte Carlo (MQMC) de Longstaff e Schwartz (2001).¹⁰ Conforme se pode notar, há uma convergência entre os preços estimados pelos três modelos, com diferenças normalmente a partir da segunda casa decimal.

	PETR3 e PETR4	BBDC3 e BBDC4	VALE3 e VALE5	PETR4 e PTIP4	ITAU4 e BBDC4	USIM5 e ACES4
<i>Lattice</i> (Rubinstein)	8,6603	1,0204	13,8501	28,9896	38,5275	41,8753
<i>Lattice</i> (Brandimarte)	8,6603	1,0206	13,8501	28,9900	38,5200	41,9000
MQMC	8,6681	1,0223	13,8764	29,0119	38,5427	41,9121

Tabela 7 - Avaliação de Opções de Troca Americanas

	PETR3 e PETR4	BBDC3 e BBDC4	VALE3 e VALE5	PETR4 e PTIP4	ITAU4 e BBDC4	USIM5 e ACES4
<i>Lattice</i> (Rubinstein)	0,3290	0,3468	0,6741	0,9062	0,9704	2,5406
<i>Lattice</i> (Brandimarte)	0,3286	0,3463	0,6749	0,9062	0,9703	2,5405
MQMC	0,3291	0,3452	0,6744	0,8948	0,9687	2,5343

Tabela 8 - Avaliação de Opções de Spread Americanas

4.4.1 Análise de sensibilidade

Assim como foi realizado em relação às opções europeias de troca e às opções europeias de *spread*, pode-se avaliar o comportamento do preço das opções americanas em questão frente a mudanças em determinados parâmetros dos modelos. Assim, a tabela 9 apresenta a análise do comportamento do preço da opção americana de troca de ações ordinárias por ações preferenciais da Vale do Rio Doce (códigos VALE3 e VALE5, respectivamente) frente à redução de 30% na correlação (de 0,99 para 0,69), ao

⁸ Cabe destacar que o efeito dessa variável é praticamente nulo tanto nas opções de troca europeias quanto nas opções de *spread* europeias. Por esse motivo, as taxas de dividendos não foram consideradas na avaliação destas opções. Não obstante, poderiam ter sido contempladas sem nenhuma dificuldade.

⁹ Fonte: www.bloomberg.com

¹⁰ Considerou-se 25.000 simulações de Monte Carlo para cada preço estimado, o que demonstrou ser suficiente para convergência dos resultados.

aumento na taxa de dividendos anual da VALE3 de 1,421% para 3%, e ao aumento de 50% na volatilidade diária da VALE3 (de 2,98% para 4,47%).

Conforme esperado, a redução na correlação entre os ativos subjacentes afeta positivamente o preço da opção. O mesmo se verificou em relação ao aumento da volatilidade dos ativos subjacentes, sendo que o efeito dessa mudança sobre a VALE3 é maior do que aquele observado em relação à VALE5, o que se deve principalmente ao valor inicial maior daquela ação em relação a esta. Já o aumento da taxa de dividendos de cada ativo subjacente produz efeitos distintos dependendo de qual for o ativo subjacente. Uma taxa de dividendos maior representa uma redução na taxa de crescimento esperada do ativo. Assim, como a VALE3 aparece com sinal positivo no *payoff* da opção, o efeito final de um aumento na sua taxa de dividendos gera uma redução no preço da opção. Por outro lado, como a VALE5 aparece com sinal negativo no *payoff* da opção, o efeito final de um aumento na sua taxa de dividendos gera um aumento no preço da opção.

Cabe destacar que os modelos de Rubinstein (1994) e Brandimarte (2006) apresentaram pouca sensibilidade às mudanças de variáveis realizadas, enquanto que o modelo baseado no Método Mínimos Quadrados de Monte Carlo (MQMC) de Longstaff e Schwartz (2001) respondeu mais fortemente em praticamente todos os casos estudados.

	<i>Lattice</i> (Rubinstein)	<i>Lattice</i> (Brandimarte)	MQMC
<u>Cenário Base</u>	13,8501	13,8501	13.8764
Redução de 30% na correlação	13.8560	13.8557	13.9454
Aumento na taxa de dividendos da VALE3 para 3%	13.8500	13.8232	13.8699
Aumento na taxa de dividendos da VALE5 para 3%	13.8694	13,8694	13,8952
Aumento de 50% na Volatilidade da VALE3	13.8504	13.8502	13.9324
Aumento de 50% na Volatilidade da VALE5	13,8502	13,8501	13,8837

Tabela 9 – Sensibilidade do Preço da Opção de Troca Americana (VALE3 e VALE5)

Considerando opções americanas de *spread* entre as ações VALE3 e VALE5, a tabela 10 apresenta os resultados das mesmas análises de sensibilidade realizadas anteriormente para as opções americanas de troca entre essas ações. Adicionalmente, avaliou-se a sensibilidade do preço da opção de *spread* frente a uma redução de 30% em seu preço de exercício.

Conforme esperado, a redução na correlação entre os ativos subjacentes também afetou positivamente o preço da opção de *spread*. Porém, a sensibilidade verificada foi

mais forte do que a ocorrida em relação às opções de troca. Quanto à volatilidade dos ativos subjacentes, o efeito da mudança na volatilidade da VALE3 apresentou-se significativamente maior do que aquele observado frente às mudanças na volatilidade da VALE5, o que se deve tanto ao valor inicial maior daquela ação em relação a esta quanto à presença do preço de exercício no *payoff* da opção, que limita o fluxo de caixa final do titular em caso de queda do preço da VALE5 em relação à VALE3. No que se refere ao aumento da taxa de dividendos de cada ativo subjacente, este produz efeitos distintos dependendo de qual for o ativo subjacente, pelos mesmos motivos descritos anteriormente em relação à opção de troca estudada. Adicionalmente, notou-se também que o valor da opção apresentou forte sensibilidade à redução de 30% no preço de exercício.

Finalmente, cabe destacar que os três modelos utilizados apresentaram resultados semelhantes em relação às mudanças aplicadas nas variáveis.

	<i>Lattice</i> (Rubinstein)	<i>Lattice</i> (Brandimarte)	MQMC
<u>Cenário Base</u>	0,6741	0,6749	0,6744
Redução de 30% na correlação	2,1327	2,1332	2,1263
Aumento na taxa de dividendos da VALE3 para 3%	0,6604	0,6611	0,6580
Aumento na taxa de dividendos da VALE5 para 3%	0,6840	0,6848	0,6845
Aumento de 50% na Volatilidade da VALE3	2,0625	2,0627	2,0607
Aumento de 50% na Volatilidade da VALE5	0,7880	0,7892	0,7874
Redução de 30% no Preço de Exercício	4,1752	4,1751	4,1893

Tabela 10 – Sensibilidade do Preço da Opção de *Spread* Americana (VALE3 e VALE5)

5. Conclusões

As opções de troca e opções de *spread* são contratos que envolvem uma certa complexidade, dentre outras coisas por tomar dois ativos subjacentes como referência em seu *payoff*. Não obstante, representam alternativas interessantes para cobertura de posições em diversos ativos, atingindo os mercados de ações, *commodities*, taxas de juros, *swaps* e futuros. Desse modo, a principal motivação do presente trabalho foi apresentar ferramentas para uma avaliação adequada desses derivativos, o que se torna imprescindível para sua melhor compreensão e uso adequado.

Nessa linha, acredita-se que os modelos aqui apresentados possam ser utilizados por participantes do mercado interessados em negociar esses títulos, permitindo, além

de encontrar seus preços justos, a realização de análises de sensibilidade do valor dos mesmos frente a mudanças nos parâmetros de entrada dos modelos.

O modelo desenvolvido para avaliação de opções européias de troca e de *spread* apresentou boa aderência com os resultados obtidos a partir das fórmulas fechadas de Margrabe (1978) - no caso de opções de troca - e Kirk (1995) - no caso de opções de spread. Adicionalmente, verificou-se boa aderência também em relação aos resultados obtidos pelos três modelos aplicados à avaliação de opções de troca e de spread americanas, ou seja, os métodos *lattice* baseados em pirâmides binomiais tridimensionais de Rubinstein (1994) e de Brandimarte (2006) e a adaptação do método Mínimos Quadrados de Monte Carlo (MQMC), de Longstaff e Schwartz (2001), de forma a considerar o caso multidimensional.

Quanto a possíveis aprimoramentos ou extensões deste trabalho, poder-se-ia optar pelos modelos Quasi-Monte Carlo Híbrido, que surge como alternativa à Simulação de Monte Carlo tradicional. Adicionalmente, há ainda a possibilidade de se explorar as técnicas de redução de variância, como a técnica de Variáveis Antitéticas, Variáveis de Controle, Amostragem por Importância, entre outras.

Bibliografia:

- [1] **Araújo, R. O.** Avaliação de Opções Reais Através do Método dos Mínimos Quadrados de Monte Carlo. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Industrial, PUC-Rio, 2004.
- [2] **Armada, M.R., Kryzanowsky, L., Pereira, P.J.** A Modified Finite-Lived American Exchange Option Methodology Applied to Real Options Valuation. *Global Finance Journal*, Vol. 17, Issue 3, p. 419-438, 2007.
- [3] **Azevedo, H. D. O., Barbachan, J. F.** Avaliação de Derivativos Bidimensionais. Ibmec, São Paulo. Financelab Working Paper - Junho de 2004.
- [4] **Berrahouim, M.** Pricing CMS Spread Options and Digital CMS Spread Options with Smile. Technical Article. *Wilmott Magazine Article*, June 2007.
- [5] **Brandimarte, P.** Numerical Methods in Finance and Economics: A MATLAB-Based Introduction (Statistics in Practice). Hardcover, October 2006.
- [6] **Brennan, M., Schwartz, E.** The valuation of American put options. *Journal of Finance*, 32, p. 449-462, 1977
- [7] **Boyle, P. P.** Options: a Monte Carlo Approach. *Journal of Financial Economics*, 4, p. 323-338, 1977.
- [8] **Boyle, P. P.** A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables. *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, 23, March 1988.
- [9] **Boyle, P. P., Evnine, J., Gibbs, S.** Numerical Evaluation of Multivariate Contingent Claims. *The Review of Financial Studies*, Vol. 2, Nº 2, p. 241-250, 1989
- [10] **Carr, P.** *The Valuation of Sequential Exchange Opportunities*, *The Journal of Finance*, Vol. 43, Issue 5, p. 1235-1256, 1988.
- [11] **Cox, J., Ingersoll, S. Ross.** A Theory of Term Structure of Interest Rates, *Econometrica*, 53, p. 385-407, 1985.
- [12] **Cox, J., Ross, A., Rubinstein, M.** Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics*, 7, pp 229–263, 1979.
- [13] **Grand, D., Vora, G., Weeks, D.** Simulation and Early-Exercise of Option Problem. *Journal of Financial Engineering*, v. 5, n.3, p. 211-227, 1996.
- [14] **Iorio, G., Samanez, C. P., Raposo, G. S.** Avaliação de Títulos Conversíveis com Opções de Compra e Venda: Uma Aplicação dos Métodos de Simulação Grand, Vora e Weeks e Mínimos Quadrados de Monte Carlo. *Revista de Economia e Administração - IBMEC Educacional S.A.*, Volume 5, Número 4, outubro/dezembro 2006
- [15] **Johnson, H.** Options on the maximum or the minimum of several assets. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 22, p. 277- 283, 1987.

- [16] **Kamrad, B., Ritchken, P.** Multinomial Approximating Models for Option with K State Variables. *Management Science*, Volume 37, n° 12, 1991.
- [17] **Kirk, E.** Correlation in The Energy Markets. *Managing Energy Price Risk* (First Edition), London: Risk Publications and Enron, p. 71-78, 1995.
- [18] **Longstaff, F.** The Valuation of Options on Yields, *Journal of Financial Economics*, 26, p. 97-122, 1990.
- [19] **Longstaff, F. A., Schwartz, E.** Valuing American Options by Simulations: A Simple Least-Squares Approach. *Review of Financial Studies*, 14 (1), p. 113-147, 2001.
- [20] **Margrabe, W.** The Value of an Option to Exchange One Asset for Another. *The Journal of Finance*, 33, 177-186, 1978.
- [21] **Merton, R.** The Theory of Rational Option Pricing, *The Bell Journal of Economics and Management Science*, V.4, p. 141-183, 1973.
- [22] **Qiang Fu.** On the Valuation of an Option to Exchange one Interest Rate for Another. *Journal of Banking and Finance*, 20, 645-653, 1996.
- [23] **Rubinstein, M.** Somewhere Over the Rainbow and Return to Oz. *Risk*, 4 (November 1991), p. 63-66 e *Risk*, 7, p. 67-71, 1994.
- [24] **Stulz, R.** Options on the Minimum or the Maximum of Two Risky Assets: Analysis and Applications. *Journal of Financial Economics*, 10, p.161-185, 1982.
- [25] **Villani, G.** A Monte Carlo Approach to Value Exchange Options Using a Single Stochastic Factor. Department of Economics, Mathematics and Statistics, University of Foggia, Quaderno, n. 8, 2007.
- [26] **Venkatramanan, A.** American Spread Option Pricing. Master dissertation. University of Reading. Department of Mathematics, August 2005.
- [27] **Vladislav, K.** Lattice Option Pricing by Multidimensional Interpolation *Mathematical Finance*, v.15 (4), p. 635–647, 2005.

Banco Central do Brasil

Trabalhos para Discussão

Os Trabalhos para Discussão podem ser acessados na internet, no formato PDF, no endereço: <http://www.bc.gov.br>

Working Paper Series

Working Papers in PDF format can be downloaded from: <http://www.bc.gov.br>

- | | | |
|-----------|---|----------|
| 1 | Implementing Inflation Targeting in Brazil
<i>Joel Bogdanski, Alexandre Antonio Tombini and Sérgio Ribeiro da Costa Werlang</i> | Jul/2000 |
| 2 | Política Monetária e Supervisão do Sistema Financeiro Nacional no Banco Central do Brasil
<i>Eduardo Lundberg</i> | Jul/2000 |
| | Monetary Policy and Banking Supervision Functions on the Central Bank
<i>Eduardo Lundberg</i> | Jul/2000 |
| 3 | Private Sector Participation: a Theoretical Justification of the Brazilian Position
<i>Sérgio Ribeiro da Costa Werlang</i> | Jul/2000 |
| 4 | An Information Theory Approach to the Aggregation of Log-Linear Models
<i>Pedro H. Albuquerque</i> | Jul/2000 |
| 5 | The Pass-Through from Depreciation to Inflation: a Panel Study
<i>Ilan Goldfajn and Sérgio Ribeiro da Costa Werlang</i> | Jul/2000 |
| 6 | Optimal Interest Rate Rules in Inflation Targeting Frameworks
<i>José Alvaro Rodrigues Neto, Fabio Araújo and Marta Baltar J. Moreira</i> | Jul/2000 |
| 7 | Leading Indicators of Inflation for Brazil
<i>Marcelle Chauvet</i> | Sep/2000 |
| 8 | The Correlation Matrix of the Brazilian Central Bank's Standard Model for Interest Rate Market Risk
<i>José Alvaro Rodrigues Neto</i> | Sep/2000 |
| 9 | Estimating Exchange Market Pressure and Intervention Activity
<i>Emanuel-Werner Kohlscheen</i> | Nov/2000 |
| 10 | Análise do Financiamento Externo a uma Pequena Economia
Aplicação da Teoria do Prêmio Monetário ao Caso Brasileiro: 1991–1998
<i>Carlos Hamilton Vasconcelos Araújo e Renato Galvão Flôres Júnior</i> | Mar/2001 |
| 11 | A Note on the Efficient Estimation of Inflation in Brazil
<i>Michael F. Bryan and Stephen G. Cecchetti</i> | Mar/2001 |
| 12 | A Test of Competition in Brazilian Banking
<i>Márcio I. Nakane</i> | Mar/2001 |

13	Modelos de Previsão de Insolvência Bancária no Brasil <i>Marcio Magalhães Janot</i>	Mar/2001
14	Evaluating Core Inflation Measures for Brazil <i>Francisco Marcos Rodrigues Figueiredo</i>	Mar/2001
15	Is It Worth Tracking Dollar/Real Implied Volatility? <i>Sandro Canesso de Andrade and Benjamin Miranda Tabak</i>	Mar/2001
16	Avaliação das Projeções do Modelo Estrutural do Banco Central do Brasil para a Taxa de Variação do IPCA <i>Sergio Afonso Lago Alves</i>	Mar/2001
	Evaluation of the Central Bank of Brazil Structural Model's Inflation Forecasts in an Inflation Targeting Framework <i>Sergio Afonso Lago Alves</i>	Jul/2001
17	Estimando o Produto Potencial Brasileiro: uma Abordagem de Função de Produção <i>Tito Nícias Teixeira da Silva Filho</i>	Abr/2001
	Estimating Brazilian Potential Output: a Production Function Approach <i>Tito Nícias Teixeira da Silva Filho</i>	Aug/2002
18	A Simple Model for Inflation Targeting in Brazil <i>Paulo Springer de Freitas and Marcelo Kfoury Muinhos</i>	Apr/2001
19	Uncovered Interest Parity with Fundamentals: a Brazilian Exchange Rate Forecast Model <i>Marcelo Kfoury Muinhos, Paulo Springer de Freitas and Fabio Araújo</i>	May/2001
20	Credit Channel without the LM Curve <i>Victorio Y. T. Chu and Márcio I. Nakane</i>	May/2001
21	Os Impactos Econômicos da CPMF: Teoria e Evidência <i>Pedro H. Albuquerque</i>	Jun/2001
22	Decentralized Portfolio Management <i>Paulo Coutinho and Benjamin Miranda Tabak</i>	Jun/2001
23	Os Efeitos da CPMF sobre a Intermediação Financeira <i>Sérgio Mikio Koyama e Márcio I. Nakane</i>	Jul/2001
24	Inflation Targeting in Brazil: Shocks, Backward-Looking Prices, and IMF Conditionality <i>Joel Bogdanski, Paulo Springer de Freitas, Ilan Goldfajn and Alexandre Antonio Tombini</i>	Aug/2001
25	Inflation Targeting in Brazil: Reviewing Two Years of Monetary Policy 1999/00 <i>Pedro Fachada</i>	Aug/2001
26	Inflation Targeting in an Open Financially Integrated Emerging Economy: the Case of Brazil <i>Marcelo Kfoury Muinhos</i>	Aug/2001
27	Complementaridade e Fungibilidade dos Fluxos de Capitais Internacionais <i>Carlos Hamilton Vasconcelos Araújo e Renato Galvão Flôres Júnior</i>	Set/2001

- 28 **Regras Monetárias e Dinâmica Macroeconômica no Brasil: uma Abordagem de Expectativas Racionais** Nov/2001
Marco Antonio Bonomo e Ricardo D. Brito
- 29 **Using a Money Demand Model to Evaluate Monetary Policies in Brazil** Nov/2001
Pedro H. Albuquerque and Solange Gouvêa
- 30 **Testing the Expectations Hypothesis in the Brazilian Term Structure of Interest Rates** Nov/2001
Benjamin Miranda Tabak and Sandro Canesso de Andrade
- 31 **Algumas Considerações sobre a Sazonalidade no IPCA** Nov/2001
Francisco Marcos R. Figueiredo e Roberta Blass Staub
- 32 **Crises Cambiais e Ataques Especulativos no Brasil** Nov/2001
Mauro Costa Miranda
- 33 **Monetary Policy and Inflation in Brazil (1975-2000): a VAR Estimation** Nov/2001
André Minella
- 34 **Constrained Discretion and Collective Action Problems: Reflections on the Resolution of International Financial Crises** Nov/2001
Arminio Fraga and Daniel Luiz Gleizer
- 35 **Uma Definição Operacional de Estabilidade de Preços** Dez/2001
Tito Nícias Teixeira da Silva Filho
- 36 **Can Emerging Markets Float? Should They Inflation Target?** Feb/2002
Barry Eichengreen
- 37 **Monetary Policy in Brazil: Remarks on the Inflation Targeting Regime, Public Debt Management and Open Market Operations** Mar/2002
Luiz Fernando Figueiredo, Pedro Fachada and Sérgio Goldenstein
- 38 **Volatilidade Implícita e Antecipação de Eventos de Stress: um Teste para o Mercado Brasileiro** Mar/2002
Frederico Pechir Gomes
- 39 **Opções sobre Dólar Comercial e Expectativas a Respeito do Comportamento da Taxa de Câmbio** Mar/2002
Paulo Castor de Castro
- 40 **Speculative Attacks on Debts, Dollarization and Optimum Currency Areas** Apr/2002
Aloisio Araujo and Márcia Leon
- 41 **Mudanças de Regime no Câmbio Brasileiro** Jun/2002
Carlos Hamilton V. Araújo e Getúlio B. da Silveira Filho
- 42 **Modelo Estrutural com Setor Externo: Endogenização do Prêmio de Risco e do Câmbio** Jun/2002
Marcelo Kfoury Muinhos, Sérgio Afonso Lago Alves e Gil Riella
- 43 **The Effects of the Brazilian ADRs Program on Domestic Market Efficiency** Jun/2002
Benjamin Miranda Tabak and Eduardo José Araújo Lima

44	Estrutura Competitiva, Produtividade Industrial e Liberação Comercial no Brasil <i>Pedro Cavalcanti Ferreira e Osmani Teixeira de Carvalho Guillén</i>	Jun/2002
45	Optimal Monetary Policy, Gains from Commitment, and Inflation Persistence <i>André Minella</i>	Aug/2002
46	The Determinants of Bank Interest Spread in Brazil <i>Tarsila Segalla Afanasieff, Priscilla Maria Villa Lhacer and Márcio I. Nakane</i>	Aug/2002
47	Indicadores Derivados de Agregados Monetários <i>Fernando de Aquino Fonseca Neto e José Albuquerque Júnior</i>	Set/2002
48	Should Government Smooth Exchange Rate Risk? <i>Ilan Goldfajn and Marcos Antonio Silveira</i>	Sep/2002
49	Desenvolvimento do Sistema Financeiro e Crescimento Econômico no Brasil: Evidências de Causalidade <i>Orlando Carneiro de Matos</i>	Set/2002
50	Macroeconomic Coordination and Inflation Targeting in a Two-Country Model <i>Eui Jung Chang, Marcelo Kfoury Muinhos and Joaúlio Rodolpho Teixeira</i>	Sep/2002
51	Credit Channel with Sovereign Credit Risk: an Empirical Test <i>Victorio Yi Tson Chu</i>	Sep/2002
52	Generalized Hyperbolic Distributions and Brazilian Data <i>José Fajardo and Aquiles Farias</i>	Sep/2002
53	Inflation Targeting in Brazil: Lessons and Challenges <i>André Minella, Paulo Springer de Freitas, Ilan Goldfajn and Marcelo Kfoury Muinhos</i>	Nov/2002
54	Stock Returns and Volatility <i>Benjamin Miranda Tabak and Solange Maria Guerra</i>	Nov/2002
55	Componentes de Curto e Longo Prazo das Taxas de Juros no Brasil <i>Carlos Hamilton Vasconcelos Araújo e Osmani Teixeira de Carvalho de Guillén</i>	Nov/2002
56	Causality and Cointegration in Stock Markets: the Case of Latin America <i>Benjamin Miranda Tabak and Eduardo José Araújo Lima</i>	Dec/2002
57	As Leis de Falência: uma Abordagem Econômica <i>Aloisio Araujo</i>	Dez/2002
58	The Random Walk Hypothesis and the Behavior of Foreign Capital Portfolio Flows: the Brazilian Stock Market Case <i>Benjamin Miranda Tabak</i>	Dec/2002
59	Os Preços Administrados e a Inflação no Brasil <i>Francisco Marcos R. Figueiredo e Thaís Porto Ferreira</i>	Dez/2002
60	Delegated Portfolio Management <i>Paulo Coutinho and Benjamin Miranda Tabak</i>	Dec/2002

61	O Uso de Dados de Alta Frequência na Estimação da Volatilidade e do Valor em Risco para o Ibovespa <i>João Maurício de Souza Moreira e Eduardo Facó Lemgruber</i>	Dez/2002
62	Taxa de Juros e Concentração Bancária no Brasil <i>Eduardo Kiyoshi Tonooka e Sérgio Mikio Koyama</i>	Fev/2003
63	Optimal Monetary Rules: the Case of Brazil <i>Charles Lima de Almeida, Marco Aurélio Peres, Geraldo da Silva e Souza and Benjamin Miranda Tabak</i>	Fev/2003
64	Medium-Size Macroeconomic Model for the Brazilian Economy <i>Marcelo Kfoury Muinhos and Sergio Afonso Lago Alves</i>	Fev/2003
65	On the Information Content of Oil Future Prices <i>Benjamin Miranda Tabak</i>	Fev/2003
66	A Taxa de Juros de Equilíbrio: uma Abordagem Múltipla <i>Pedro Calhman de Miranda e Marcelo Kfoury Muinhos</i>	Fev/2003
67	Avaliação de Métodos de Cálculo de Exigência de Capital para Risco de Mercado de Carteiras de Ações no Brasil <i>Gustavo S. Araújo, João Maurício S. Moreira e Ricardo S. Maia Clemente</i>	Fev/2003
68	Real Balances in the Utility Function: Evidence for Brazil <i>Leonardo Soriano de Alencar and Márcio I. Nakane</i>	Fev/2003
69	r-filters: a Hodrick-Prescott Filter Generalization <i>Fabio Araújo, Marta Baltar Moreira Areosa and José Alvaro Rodrigues Neto</i>	Fev/2003
70	Monetary Policy Surprises and the Brazilian Term Structure of Interest Rates <i>Benjamin Miranda Tabak</i>	Fev/2003
71	On Shadow-Prices of Banks in Real-Time Gross Settlement Systems <i>Rodrigo Penaloza</i>	Apr/2003
72	O Prêmio pela Maturidade na Estrutura a Termo das Taxas de Juros Brasileiras <i>Ricardo Dias de Oliveira Brito, Angelo J. Mont'Alverne Duarte e Osmani Teixeira de C. Guillen</i>	Maio/2003
73	Análise de Componentes Principais de Dados Funcionais – uma Aplicação às Estruturas a Termo de Taxas de Juros <i>Getúlio Borges da Silveira e Octavio Bessada</i>	Maio/2003
74	Aplicação do Modelo de Black, Derman & Toy à Precificação de Opções Sobre Títulos de Renda Fixa <i>Octavio Manuel Bessada Lion, Carlos Alberto Nunes Cosenza e César das Neves</i>	Maio/2003
75	Brazil's Financial System: Resilience to Shocks, no Currency Substitution, but Struggling to Promote Growth <i>Ilan Goldfajn, Katherine Hennings and Helio Mori</i>	Jun/2003

76	Inflation Targeting in Emerging Market Economies <i>Arminio Fraga, Ilan Goldfajn and André Minella</i>	Jun/2003
77	Inflation Targeting in Brazil: Constructing Credibility under Exchange Rate Volatility <i>André Minella, Paulo Springer de Freitas, Ilan Goldfajn and Marcelo Kfoury Muinhos</i>	Jul/2003
78	Contornando os Pressupostos de Black & Scholes: Aplicação do Modelo de Precificação de Opções de Duan no Mercado Brasileiro <i>Gustavo Silva Araújo, Claudio Henrique da Silveira Barbedo, Antonio Carlos Figueiredo, Eduardo Facó Lemgruber</i>	Out/2003
79	Inclusão do Decaimento Temporal na Metodologia Delta-Gama para o Cálculo do VaR de Carteiras Compradas em Opções no Brasil <i>Claudio Henrique da Silveira Barbedo, Gustavo Silva Araújo, Eduardo Facó Lemgruber</i>	Out/2003
80	Diferenças e Semelhanças entre Países da América Latina: uma Análise de Markov Switching para os Ciclos Econômicos de Brasil e Argentina <i>Arnildo da Silva Correa</i>	Out/2003
81	Bank Competition, Agency Costs and the Performance of the Monetary Policy <i>Leonardo Soriano de Alencar and Márcio I. Nakane</i>	Jan/2004
82	Carteiras de Opções: Avaliação de Metodologias de Exigência de Capital no Mercado Brasileiro <i>Cláudio Henrique da Silveira Barbedo e Gustavo Silva Araújo</i>	Mar/2004
83	Does Inflation Targeting Reduce Inflation? An Analysis for the OECD Industrial Countries <i>Thomas Y. Wu</i>	May/2004
84	Speculative Attacks on Debts and Optimum Currency Area: a Welfare Analysis <i>Aloisio Araujo and Marcia Leon</i>	May/2004
85	Risk Premia for Emerging Markets Bonds: Evidence from Brazilian Government Debt, 1996-2002 <i>André Soares Loureiro and Fernando de Holanda Barbosa</i>	May/2004
86	Identificação do Fator Estocástico de Descontos e Algumas Implicações sobre Testes de Modelos de Consumo <i>Fabio Araujo e João Victor Issler</i>	Maio/2004
87	Mercado de Crédito: uma Análise Econométrica dos Volumes de Crédito Total e Habitacional no Brasil <i>Ana Carla Abrão Costa</i>	Dez/2004
88	Ciclos Internacionais de Negócios: uma Análise de Mudança de Regime Markoviano para Brasil, Argentina e Estados Unidos <i>Arnildo da Silva Correa e Ronald Otto Hillbrecht</i>	Dez/2004
89	O Mercado de Hedge Cambial no Brasil: Reação das Instituições Financeiras a Intervenções do Banco Central <i>Fernando N. de Oliveira</i>	Dez/2004

- 90 Bank Privatization and Productivity: Evidence for Brazil** Dec/2004
Márcio I. Nakane and Daniela B. Weintraub
- 91 Credit Risk Measurement and the Regulation of Bank Capital and Provision Requirements in Brazil – a Corporate Analysis** Dec/2004
Ricardo Schechtman, Valéria Salomão Garcia, Sergio Miki Koyama and Guilherme Cronemberger Parente
- 92 Steady-State Analysis of an Open Economy General Equilibrium Model for Brazil** Apr/2005
Mirta Noemi Sataka Bugarin, Roberto de Goes Ellery Jr., Victor Gomes Silva, Marcelo Kfoury Muinhos
- 93 Avaliação de Modelos de Cálculo de Exigência de Capital para Risco Cambial** Abr/2005
Claudio H. da S. Barbedo, Gustavo S. Araújo, João Maurício S. Moreira e Ricardo S. Maia Clemente
- 94 Simulação Histórica Filtrada: Incorporação da Volatilidade ao Modelo Histórico de Cálculo de Risco para Ativos Não-Lineares** Abr/2005
Claudio Henrique da Silveira Barbedo, Gustavo Silva Araújo e Eduardo Facó Lemgruber
- 95 Comment on Market Discipline and Monetary Policy by Carl Walsh** Apr/2005
Maurício S. Bugarin and Fábria A. de Carvalho
- 96 O que É Estratégia: uma Abordagem Multiparadigmática para a Disciplina** Ago/2005
Anthero de Moraes Meirelles
- 97 Finance and the Business Cycle: a Kalman Filter Approach with Markov Switching** Aug/2005
Ryan A. Compton and Jose Ricardo da Costa e Silva
- 98 Capital Flows Cycle: Stylized Facts and Empirical Evidences for Emerging Market Economies** Aug/2005
Helio Mori e Marcelo Kfoury Muinhos
- 99 Adequação das Medidas de Valor em Risco na Formulação da Exigência de Capital para Estratégias de Opções no Mercado Brasileiro** Set/2005
Gustavo Silva Araújo, Claudio Henrique da Silveira Barbedo, e Eduardo Facó Lemgruber
- 100 Targets and Inflation Dynamics** Oct/2005
Sergio A. L. Alves and Waldyr D. Areosa
- 101 Comparing Equilibrium Real Interest Rates: Different Approaches to Measure Brazilian Rates** Mar/2006
Marcelo Kfoury Muinhos and Márcio I. Nakane
- 102 Judicial Risk and Credit Market Performance: Micro Evidence from Brazilian Payroll Loans** Apr/2006
Ana Carla A. Costa and João M. P. de Mello
- 103 The Effect of Adverse Supply Shocks on Monetary Policy and Output** Apr/2006
Maria da Glória D. S. Araújo, Mirta Bugarin, Marcelo Kfoury Muinhos and Jose Ricardo C. Silva

- 104 Extração de Informação de Opções Cambiais no Brasil** Abr/2006
Eui Jung Chang e Benjamin Miranda Tabak
- 105 Representing Roommate's Preferences with Symmetric Utilities** Apr/2006
José Alvaro Rodrigues Neto
- 106 Testing Nonlinearities Between Brazilian Exchange Rates and Inflation Volatilities** May/2006
Cristiane R. Albuquerque and Marcelo Portugal
- 107 Demand for Bank Services and Market Power in Brazilian Banking** Jun/2006
Márcio I. Nakane, Leonardo S. Alencar and Fabio Kanczuk
- 108 O Efeito da Consignação em Folha nas Taxas de Juros dos Empréstimos Pessoais** Jun/2006
Eduardo A. S. Rodrigues, Victorio Chu, Leonardo S. Alencar e Tony Takeda
- 109 The Recent Brazilian Disinflation Process and Costs** Jun/2006
Alexandre A. Tombini and Sergio A. Lago Alves
- 110 Fatores de Risco e o *Spread* Bancário no Brasil** Jul/2006
Fernando G. Bignotto e Eduardo Augusto de Souza Rodrigues
- 111 Avaliação de Modelos de Exigência de Capital para Risco de Mercado do Cupom Cambial** Jul/2006
Alan Cosme Rodrigues da Silva, João Maurício de Souza Moreira e Myrian Beatriz Eiras das Neves
- 112 Interdependence and Contagion: an Analysis of Information Transmission in Latin America's Stock Markets** Jul/2006
Angelo Marsiglia Fasolo
- 113 Investigação da Memória de Longo Prazo da Taxa de Câmbio no Brasil** Ago/2006
Sergio Rubens Stancato de Souza, Benjamin Miranda Tabak e Daniel O. Cajueiro
- 114 The Inequality Channel of Monetary Transmission** Aug/2006
Marta Areosa and Waldyr Areosa
- 115 Myopic Loss Aversion and House-Money Effect Overseas: an Experimental Approach** Sep/2006
José L. B. Fernandes, Juan Ignacio Peña and Benjamin M. Tabak
- 116 Out-Of-The-Money Monte Carlo Simulation Option Pricing: the Joint Use of Importance Sampling and Descriptive Sampling** Sep/2006
Jaqueline Terra Moura Marins, Eduardo Saliby and Josete Florencio dos Santos
- 117 An Analysis of Off-Site Supervision of Banks' Profitability, Risk and Capital Adequacy: a Portfolio Simulation Approach Applied to Brazilian Banks** Sep/2006
Theodore M. Barnhill, Marcos R. Souto and Benjamin M. Tabak
- 118 Contagion, Bankruptcy and Social Welfare Analysis in a Financial Economy with Risk Regulation Constraint** Oct/2006
Aloísio P. Araújo and José Valentim M. Vicente

119	A Central de Risco de Crédito no Brasil: uma Análise de Utilidade de Informação <i>Ricardo Schechtman</i>	Out/2006
120	Forecasting Interest Rates: an Application for Brazil <i>Eduardo J. A. Lima, Felipe Luduvicé and Benjamin M. Tabak</i>	Oct/2006
121	The Role of Consumer's Risk Aversion on Price Rigidity <i>Sergio A. Lago Alves and Mirta N. S. Bugarin</i>	Nov/2006
122	Nonlinear Mechanisms of the Exchange Rate Pass-Through: a Phillips Curve Model With Threshold for Brazil <i>Arnildo da Silva Correa and André Minella</i>	Nov/2006
123	A Neoclassical Analysis of the Brazilian "Lost-Decades" <i>Flávia Mourão Graminho</i>	Nov/2006
124	The Dynamic Relations between Stock Prices and Exchange Rates: Evidence for Brazil <i>Benjamin M. Tabak</i>	Nov/2006
125	Herding Behavior by Equity Foreign Investors on Emerging Markets <i>Barbara Alemanni and José Renato Haas Ornelas</i>	Dec/2006
126	Risk Premium: Insights over the Threshold <i>José L. B. Fernandes, Augusto Hasman and Juan Ignacio Peña</i>	Dec/2006
127	Uma Investigação Baseada em Reamostragem sobre Requerimentos de Capital para Risco de Crédito no Brasil <i>Ricardo Schechtman</i>	Dec/2006
128	Term Structure Movements Implicit in Option Prices <i>Caio Ibsen R. Almeida and José Valentim M. Vicente</i>	Dec/2006
129	Brazil: Taming Inflation Expectations <i>Afonso S. Bevilaqua, Mário Mesquita and André Minella</i>	Jan/2007
130	The Role of Banks in the Brazilian Interbank Market: Does Bank Type Matter? <i>Daniel O. Cajueiro and Benjamin M. Tabak</i>	Jan/2007
131	Long-Range Dependence in Exchange Rates: the Case of the European Monetary System <i>Sergio Rubens Stancato de Souza, Benjamin M. Tabak and Daniel O. Cajueiro</i>	Mar/2007
132	Credit Risk Monte Carlo Simulation Using Simplified Creditmetrics' Model: the Joint Use of Importance Sampling and Descriptive Sampling <i>Jaqueline Terra Moura Marins and Eduardo Saliby</i>	Mar/2007
133	A New Proposal for Collection and Generation of Information on Financial Institutions' Risk: the Case of Derivatives <i>Gilneu F. A. Vivan and Benjamin M. Tabak</i>	Mar/2007
134	Amostragem Descritiva no Apreçamento de Opções Europeias através de Simulação Monte Carlo: o Efeito da Dimensionalidade e da Probabilidade de Exercício no Ganho de Precisão <i>Eduardo Saliby, Sergio Luiz Medeiros Proença de Gouvêa e Jaqueline Terra Moura Marins</i>	Abr/2007

- 135 **Evaluation of Default Risk for the Brazilian Banking Sector** May/2007
Marcelo Y. Takami and Benjamin M. Tabak
- 136 **Identifying Volatility Risk Premium from Fixed Income Asian Options** May/2007
Caio Ibsen R. Almeida and José Valentim M. Vicente
- 137 **Monetary Policy Design under Competing Models of Inflation Persistence** May/2007
Solange Gouvea e Abhijit Sen Gupta
- 138 **Forecasting Exchange Rate Density Using Parametric Models: the Case of Brazil** May/2007
Marcos M. Abe, Eui J. Chang and Benjamin M. Tabak
- 139 **Selection of Optimal Lag Length in Cointegrated VAR Models with Weak Form of Common Cyclical Features** Jun/2007
Carlos Enrique Carrasco Gutiérrez, Reinaldo Castro Souza and Osmani Teixeira de Carvalho Guillén
- 140 **Inflation Targeting, Credibility and Confidence Crises** Aug/2007
Rafael Santos and Aloísio Araújo
- 141 **Forecasting Bonds Yields in the Brazilian Fixed income Market** Aug/2007
Jose Vicente and Benjamin M. Tabak
- 142 **Crises Análise da Coerência de Medidas de Risco no Mercado Brasileiro de Ações e Desenvolvimento de uma Metodologia Híbrida para o Expected Shortfall** Ago/2007
Alan Cosme Rodrigues da Silva, Eduardo Facó Lemgruber, José Alberto Rebello Baranowski e Renato da Silva Carvalho
- 143 **Price Rigidity in Brazil: Evidence from CPI Micro Data** Sep/2007
Solange Gouvea
- 144 **The Effect of Bid-Ask Prices on Brazilian Options Implied Volatility: a Case Study of Telemar Call Options** Oct/2007
Claudio Henrique da Silveira Barbedo and Eduardo Facó Lemgruber
- 145 **The Stability-Concentration Relationship in the Brazilian Banking System** Oct/2007
Benjamin Miranda Tabak, Solange Maria Guerra, Eduardo José Araújo Lima and Eui Jung Chang
- 146 **Movimentos da Estrutura a Termo e Critérios de Minimização do Erro de Previsão em um Modelo Paramétrico Exponencial** Out/2007
Caio Almeida, Romeu Gomes, André Leite e José Vicente
- 147 **Explaining Bank Failures in Brazil: Micro, Macro and Contagion Effects (1994-1998)** Oct/2007
Adriana Soares Sales and Maria Eduarda Tannuri-Pianto
- 148 **Um Modelo de Fatores Latentes com Variáveis Macroeconômicas para a Curva de Cupom Cambial** Out/2007
Felipe Pinheiro, Caio Almeida e José Vicente
- 149 **Joint Validation of Credit Rating PDs under Default Correlation** Oct/2007
Ricardo Schechtman

- 150 **A Probabilistic Approach for Assessing the Significance of Contextual Variables in Nonparametric Frontier Models: an Application for Brazilian Banks** Oct/2007
Roberta Blass Staub and Geraldo da Silva e Souza
- 151 **Building Confidence Intervals with Block Bootstraps for the Variance Ratio Test of Predictability** Nov/2007
Eduardo José Araújo Lima and Benjamin Miranda Tabak
- 152 **Demand for Foreign Exchange Derivatives in Brazil: Hedge or Speculation?** Dec/2007
Fernando N. de Oliveira and Walter Novaes
- 153 **Aplicação da Amostragem por Importância à Simulação de Opções Asiáticas Fora do Dinheiro** Dez/2007
Jaqueline Terra Moura Marins
- 154 **Identification of Monetary Policy Shocks in the Brazilian Market for Bank Reserves** Dec/2007
Adriana Soares Sales and Maria Tannuri-Pianto
- 155 **Does Curvature Enhance Forecasting?** Dec/2007
Caio Almeida, Romeu Gomes, André Leite and José Vicente
- 156 **Escolha do Banco e Demanda por Empréstimos: um Modelo de Decisão em Duas Etapas Aplicado para o Brasil** Dez/2007
Sérgio Mikio Koyama e Márcio I. Nakane
- 157 **Is the Investment-Uncertainty Link Really Elusive? The Harmful Effects of Inflation Uncertainty in Brazil** Jan/2008
Tito Nícias Teixeira da Silva Filho
- 158 **Characterizing the Brazilian Term Structure of Interest Rates** Feb/2008
Osmani T. Guillen and Benjamin M. Tabak
- 159 **Behavior and Effects of Equity Foreign Investors on Emerging Markets** Feb/2008
Barbara Alemanni and José Renato Haas Ornelas
- 160 **The Incidence of Reserve Requirements in Brazil: Do Bank Stockholders Share the Burden?** Feb/2008
Fábia A. de Carvalho and Cyntia F. Azevedo
- 161 **Evaluating Value-at-Risk Models via Quantile Regressions** Feb/2008
Wagner P. Gaglianone, Luiz Renato Lima and Oliver Linton
- 162 **Balance Sheet Effects in Currency Crises: Evidence from Brazil** Apr/2008
Marcio M. Janot, Márcio G. P. Garcia and Walter Novaes
- 163 **Searching for the Natural Rate of Unemployment in a Large Relative Price Shocks' Economy: the Brazilian Case** May/2008
Tito Nícias Teixeira da Silva Filho
- 164 **Foreign Banks' Entry and Departure: the recent Brazilian experience (1996-2006)** Jun/2008
Pedro Fachada