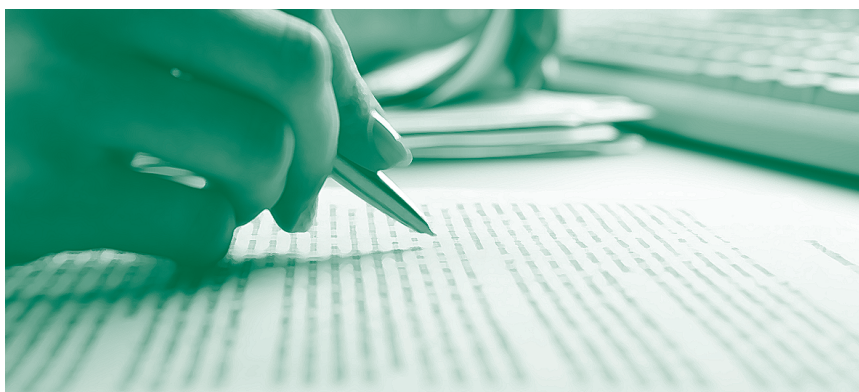


Existência de equilíbrio num jogo com bancarrota e agentes heterogêneos

Solange Maria Guerra, Rodrigo Andrés de Souza Peñaloza e Benjamin Miranda Tabak

Outubro, 2013

Trabalhos para Discussão



326

ISSN 1519-1028
CGC 00.038.166/0001-05

| | | | | | |
|--------------------------|----------|--------|---------|------|---------|
| Trabalhos para Discussão | Brasília | n° 326 | outubro | 2013 | p. 1-28 |
|--------------------------|----------|--------|---------|------|---------|

Trabalhos para Discussão

Editado pelo Departamento de Estudos e Pesquisas (Depep) – *E-mail*: workingpaper@bcb.gov.br

Editor: Benjamin Miranda Tabak – *E-mail*: benjamin.tabak@bcb.gov.br

Assistente Editorial: Jane Sofia Moita – *E-mail*: jane.sofia@bcb.gov.br

Chefe do Depep: Eduardo José Araújo Lima – *E-mail*: eduardo.lima@bcb.gov.br

Todos os Trabalhos para Discussão do Banco Central do Brasil são avaliados em processo de *double blind referee*.

Reprodução permitida somente se a fonte for citada como: Trabalhos para Discussão n° 326.

Autorizado por Carlos Hamilton Vasconcelos Araújo, Diretor de Política Econômica.

Controle Geral de Publicações

Banco Central do Brasil

Comun/Dipiv/Coivi

SBS – Quadra 3 – Bloco B – Edifício-Sede – 14° andar

Caixa Postal 8.670

70074-900 Brasília – DF

Telefones: (61) 3414-3710 e 3414-3565

Fax: (61) 3414-1898

E-mail: editor@bcb.gov.br

As opiniões expressas neste trabalho são exclusivamente do(s) autor(es) e não refletem, necessariamente, a visão do Banco Central do Brasil.

Ainda que este artigo represente trabalho preliminar, citação da fonte é requerida mesmo quando reproduzido parcialmente.

The views expressed in this work are those of the authors and do not necessarily reflect those of the Banco Central or its members.

Although these Working Papers often represent preliminary work, citation of source is required when used or reproduced.

Divisão de Atendimento ao Cidadão

Banco Central do Brasil

Deati/Diate

SBS – Quadra 3 – Bloco B – Edifício-Sede – 2° subsolo

70074-900 Brasília – DF

DDG: 0800 9792345

Fax: (61) 3414-2553

Internet: <<http://www.bcb.gov.br/?FALECONOSCO>>

Existência de equilíbrio num jogo com bancarrota e agentes heterogêneos

Solange Maria Guerra*
Rodrigo Andrés de Souza Peñaloza†
Benjamin Miranda Tabak *

Este Trabalho para Discussão não deve ser citado como representando as opiniões do Banco Central do Brasil. As opiniões expressas neste trabalho são exclusivamente dos autores e não refletem, necessariamente, a visão do Banco Central do Brasil.

Resumo

Este trabalho mostra a existência de equilíbrio de Nash para uma economia com um contínuo de agentes heterogêneos, tempo discreto, horizonte infinito, moeda fiduciária e uma mercadoria. A produção da mercadoria permanece constante em cada período, mas a dotação individual dos agentes varia estocasticamente. Buscando suavizar o consumo, os agentes depositam moeda ou tomam empréstimos em um banco central. Os agentes podem entrar em bancarrota caso não possuam recursos para honrar os débitos assumidos. Nesse caso, sofrem uma penalidade não pecuniária em sua utilidade.

Palavras-chave: Equilíbrio de Nash; Agentes Heterogêneos; Bancarrota.

Classificação JEL: C72, D50, E40.

*Departamento de Estudos e Pesquisas, Banco Central do Brasil.

†Universidade de Brasília

1 Introdução

O jogo utilizado neste trabalho foi apresentado inicialmente em Karatzas et al. (1994) de forma simplificada, focando apenas no consumo, distribuição de riqueza e formação de preço, onde a moeda poderia ser apenas acumulada. Posteriormente, em Karatzas et al. (1997), os autores apresentam uma versão mais elaborada do jogo, permitindo que os jogadores tomem emprestado ou emprestem seus recursos excedentes. Entretanto, não era permitido que os jogadores tomassem emprestado mais do que pudessem pagar. Finalmente, em Geanakoplos et al. (2000) o jogo é generalizado permitindo a bancarrota. Trata-se de um jogo de horizonte de tempo infinito com um contínuo de agentes para modelar uma economia simples, com um bem perecível e oferta constante de moeda. Na literatura de equilíbrio geral, a moeda não precisa ter um papel necessário (Hahn (1983)). No jogo apresentado por Geanakoplos et al. (2000) poderia se optar por um modelo com um mercado e um instrumento financeiro com o bem sendo usado como mercadoria ou por um modelo com um bem e dois instrumentos financeiros, com o segundo sendo moeda fiduciária. Os autores optaram pela segunda possibilidade por considerá-la mais apropriada no caso de generalizações para mais de um bem na economia.

A construção do equilíbrio nas três versões do jogo é feita no estado estacionário e considerando que os jogadores sejam homogêneos, ou seja, todos os jogadores possuem a mesma função utilidade. Tsomocos (2003) argumenta que um modelo que tente capturar aspectos fundamentais de instabilidade financeira deve ter: multiperiodicidade, incerteza agregada e heterogeneidade dos agentes. O objetivo deste artigo é generalizar a existência de equilíbrio no jogo apresentado em Geanakoplos et al. (2000). Para tanto, vamos utilizar o arcabouço teórico apresentado em Balder (1999).

Este trabalho contribui com a literatura teórica ao estender modelo apresentado em Geanakoplos et al. (2000), mostrando a existência de equilíbrio de Nash, que é mais geral que o equilíbrio de Markov no estado estacionário demonstrado no artigo original. Além disso, a construção do equilíbrio de Nash permite um contínuo de agentes de fato heterogêneos. Em Geanakoplos et al. (2000), a existência do equilíbrio é demonstrada para o caso em que os agentes são homogêneos, embora o jogo esteja definido considerando os agentes heterogêneos.

A seção 2 apresenta o modelo. Além disso, mostra a construção do conjunto de ações dos jogadores de forma a contemplar as exigências do modelo apresentado em Geanakoplos et al. (2000) e as especificações teóricas necessárias para a construção do equilíbrio de Nash do jogo considerando os jogadores heterogêneos. A seção 3 apresenta a demonstração da existência

do equilíbrio de Nash para o Jogo. As considerações finais são apresentadas na seção 4.

2 O modelo

Vamos considerar uma economia com tempo discreto e horizonte infinito, representado por $n = 1, 2, \dots$ e com um único bem perecível. Em todos os períodos há incerteza com relação à dotação e ao consumo de cada jogador o que, conseqüentemente, gera incerteza com relação ao seu nível de riqueza. Toda a incerteza dessa economia é capturada pelo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sobre o qual todas as variáveis aleatórias do modelo serão definidas. Existe um banco na economia o qual estabelece as taxas de juros para remuneração de depósitos e para empréstimos.

Há uma infinidade de jogadores, representados por α , e definidos sobre o espaço de medida de Lebesgue (I, \mathcal{I}, μ) , onde $I \triangleq [0, 1]$. Uma escolha natural para a σ -álgebra \mathcal{I} seria $\mathcal{B}(I)$, a σ -álgebra de Borel sobre I . Entretanto, desejamos que o espaço de medida dos jogadores seja completo e separável. Assim, completamos $\mathcal{B}(I)$, ou seja, consideramos a σ -álgebra \mathcal{I} como sendo todos os subconjuntos de I mensuráveis a Lebesgue. Dessa forma, temos que o espaço de medida dos jogadores (I, \mathcal{I}, μ) é completo, separável e não atômico, sendo que essa última característica expressa o fato de que não existe coalizão de jogadores, ou seja, que alguns jogadores tenha mais influência no jogo que outros jogadores. Dessa forma, garantimos que as ações de um único jogador não tem um efeito significativo sobre os preços.

Em cada período de tempo, $n = 1, 2, \dots$, cada jogador $\alpha \in I$ recebe uma dotação aleatória $Y_n(\alpha, \omega) = Y_n^\alpha$ em unidades do único bem perecível da economia, onde $\omega \in \Omega$. Para que possamos agregar essas dotações, assumimos a seguinte hipótese:

Hipótese 1. *As dotações $Y_1^\alpha, Y_2^\alpha, \dots$ para um determinado jogador α são não negativas, integráveis e independentes com distribuição comum λ^α . Além disso, as variáveis $Y_n(\alpha, \omega)$ são conjuntamente mensuráveis, de forma que a produção ou dotação total da economia*

$$Q_n \triangleq \int Y_n(\alpha, \omega) \mu(d\alpha) > 0 \quad (1)$$

seja uma variável aleatória finita, positiva e bem definida para todo n .

Há dois mercados ativos em cada período de tempo $n = 1, 2, \dots$: o mercado de crédito e o mercado de bem.

No mercado de crédito, o banco estabelece duas taxas de juros: a taxa paga pelos tomadores de empréstimos, $r_{1n}(\omega) = 1 + \rho_{1n}(\omega)$, e a taxa de juros paga aos depositantes, $r_{2n}(\omega) = 1 + \rho_{2n}(\omega)$. Assumiremos que as taxas de juros satisfazem a hipótese abaixo.

Hipótese 2. *As taxas de juros são tais que, $1 \leq r_{2n}(\omega) \leq r_{1n}(\omega)$ e $r_{2n}(\omega) < \frac{1}{\beta}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega \in \Omega$, onde $\beta \in (0, 1)$ é um fator de desconto fixo.*

No mercado de bem é negociada a única mercadoria existente na economia. Dada a sua natureza perecível, a mercadoria deve ser consumida no mesmo período em que é adquirida. Assim, os jogadores que não desejarem consumir toda a dotação recebida no período n , vendem a parte não consumida àqueles jogadores que desejam consumir mais que a dotação recebida. Nesse processo de comercialização, o preço da mercadoria no período n , denotado por $p_n(\omega)$, é determinado endogenamente.

A quantidade de moeda que um determinado jogador α vai ofertar para a aquisição de mercadoria vai depender de seu nível de riqueza no período anterior. Antes do início do jogo é estabelecida a riqueza inicial S_0^α de cada jogador α . No início do período n , um jogador α possui uma riqueza $S_{n-1}^\alpha(\omega)$. Se $S_{n-1}^\alpha(\omega) < 0$, então o jogador α não pagou seu débito do período anterior, consequentemente, sofrerá uma penalidade em termos de sua utilidade, terá seu débito perdoado e continuará no jogo com riqueza igual a zero. Se $S_{n-1}^\alpha(\omega) \geq 0$ então o jogador possui dinheiro em mão e joga com a riqueza $S_{n-1}^\alpha(\omega)$. Em ambos os casos, o jogador joga com a riqueza $(S_{n-1}^\alpha(\omega))^+ = \max\{S_{n-1}^\alpha(\omega), 0\}$. Além disso, o jogador α inicia o período n com informações $\mathcal{F}_{n-1}^\alpha \subset \mathcal{F}$, a σ -álgebra que mede os preços passados p_k , as dotações totais passadas Q_k , as taxas de juros r_{1k}, r_{2k} , bem como os níveis de riqueza, dotações e ações individuais, respectivamente, $S_0^\alpha, S_k^\alpha, Y_k^\alpha, b_k^\alpha$, para $k = 1, \dots, n-1$. Cada jogador α decide a quantidade b_n^α de moeda fiduciária que ofertará para a aquisição de mercadoria baseado em seu conjunto de informação. Então, o preço p_n é formado.

A caracterização de b_n^α será dada na seção 2.1 enquanto que o processo de formação de riqueza do jogador α num determinado período n será explicado detalhadamente na subseção 2.3.

Em muitos momentos, esboçamos a dinâmica do jogo em um período n qualquer. Entretanto, desejamos definir o jogo num espaço vetorial de dimensão infinita. Assim, teremos:

- *Dotação do jogador α :*

$$\begin{aligned} \overline{Y(\alpha, \omega)} &= (Y_1(\alpha, \omega), Y_2(\alpha, \omega), Y_3(\alpha, \omega), \dots) \\ &= (Y_1^\alpha(\omega), Y_2^\alpha(\omega), Y_3^\alpha(\omega), \dots) \end{aligned}$$

- *Dotação Total:*

$$\begin{aligned}\overline{Q(\omega)} &= (Q_1(\omega), Q_2(\omega), Q_3(\omega), \dots) \\ &= \left(\int Y_1(\alpha, \omega) \mu(d\alpha), \int Y_2(\alpha, \omega) \mu(d\alpha), \int Y_3(\alpha, \omega) \mu(d\alpha), \dots \right)\end{aligned}$$

- *Taxas de juros*

$$\begin{aligned}\overline{r_1(\omega)} &= (r_{11}(\omega), r_{12}(\omega), r_{13}(\omega), \dots) \\ \overline{r_2(\omega)} &= (r_{21}(\omega), r_{22}(\omega), r_{23}(\omega), \dots)\end{aligned}$$

- *Ação de um jogador α*

$$\overline{b^\alpha(\omega)} = (b_1^\alpha(\omega), b_2^\alpha(\omega), b_3^\alpha(\omega), \dots)$$

- *Preços*

$$\overline{p(\omega)} = (p_1(\omega), p_2(\omega), p_3(\omega), \dots)$$

Para não sobrecarregar a notação, trabalharemos com as componentes desses vetores infinitos, sempre tendo em mente que o jogo está sendo definido num horizonte de tempo infinito. Eventualmente usaremos o vetor, quando houver possibilidade de interpretação errônea ou simplesmente por conveniência.

2.1 Conjunto de ações

Cada jogador possui um limite fixo de endividamento, denotado por K^α . Assim, a quantidade de moeda b_n^α que o jogador α poderá ofertar para a compra de mercadoria dependerá de sua riqueza no período anterior e de seu limite de endividamento, ou seja,

$$b_n^\alpha \in [0, (S_{n-1}^\alpha(\omega))^+ + K^\alpha]. \quad (2)$$

Conforme será demonstrado na subseção 2.4, a quantidade de moeda se mantém constante em todos os períodos. Então, podemos afirmar que

$b_n^\alpha \in [0, \mathbb{M}]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $\mathbb{M} = \max\{W_n(\omega) + K^\alpha\}$ para todo $\omega \in \Omega$ e $n \in \mathbb{N}$, sendo $W_n(\omega)$ a quantidade total de moeda fiduciária na economia no período n .

Seja \mathcal{Z}_n o conjunto de todas as ações b_n^α para todo $\alpha \in I$. Tomaremos $\mathcal{Z} = \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{Z}_n$ o conjunto de ações. Para compatibilizar o jogo apresentado por Geanakoplos et al. (2000) e o arcabouço teórico elaborado por Balder (1999), necessitamos que \mathcal{Z} seja um espaço vetorial topológico Hausdorff localmente convexo de funções mensuráveis. Para atingirmos nosso objetivo, construiremos \mathcal{Z} e o dotaremos com uma topologia adequada aos nossos propósitos, partindo da definição de b_n^α e da construção de \mathcal{Z}_n .

Definiremos b_n^α como sendo a função de Carathéodory $c^\alpha : \Omega \times [0, \mathbb{M}] \rightarrow \mathbb{R}$, que é $(\mathcal{F}, \mathcal{B})$ -mensurável e contínua para todo $s \in [0, \mathbb{M}]$ e tal que $0 \leq c^\alpha(\omega, s) \leq s + K^\alpha$. Assim, temos: $b_n^\alpha = c^\alpha((S_{n-1}^\alpha(\omega))^+)$ para todo $\omega \in \Omega$ e $n \in \mathbb{N}$. De acordo com a versão do teorema apresentado em Aliprantis e Border (1994) para funções contínuas limitadas, apresentado no anexo (teorema 5.1), existe \hat{c}^α que mapeia Ω sobre $C_b([0, \mathbb{M}])$ - o conjunto de todas as funções reais contínuas limitadas sobre $[0, \mathbb{M}]$ - desde que $C_b([0, \mathbb{M}])$ seja munido com a topologia da convergência uniforme, em vez da convergência pontual. Ou seja, podemos tratar as funções de Carathéodory especificadas acima como sendo funções Borel mensuráveis pertencentes a $C_b([0, \mathbb{M}])$.

Portanto, consideraremos \mathcal{Z}_n como sendo o espaço métrico $C_b([0, \mathbb{M}])$, munido da topologia da convergência uniforme, ou seja, considerando a métrica usual sobre os reais, $C_b([0, \mathbb{M}])$ será munida da topologia definida pela métrica do supremo, $d(f, g) = \sup_{s \in [0, \mathbb{M}]} |f(s) - g(s)|$. Consequentemente, o espaço das ações \mathcal{Z} será o produto cartesiano infinito $\mathcal{Z} = \prod_{n=1}^{\infty} C_b([0, \mathbb{M}])$ munido da topologia produto, ou seja, a topologia mais fraca sobre \mathcal{Z} que torna as projeções $p_n : \mathcal{Z} \rightarrow C_b([0, \mathbb{M}])$ contínuas, $n = 1, 2, \dots$

Teorema 2.1. *O espaço vetorial topológico \mathcal{Z} definido acima é Hausdorff localmente convexo.*

Demonstração. Como topologias definidas por métricas são Hausdorff, naturalmente, $C_b([0, \mathbb{M}])$ é um espaço Hausdorff. Então, \mathcal{Z} também o é, já que o produto de espaços Hausdorff é um espaço Hausdorff, conforme demonstrado no teorema 5.2 no anexo.

Mostremos agora que $C_b([0, \mathbb{M}])$ é localmente convexo. Seja V_0 uma vizinhança da função nula $0 \in C_b([0, \mathbb{M}])$. Tomemos f e $g \in V_0$, então:

$$d(f, 0) = \sup_{s \in [0, \mathbb{M}]} |f(s) - 0(s)| < \epsilon \quad \text{e}$$

$$d(g, 0) = \sup_{s \in [0, \mathbb{M}]} |g(s) - 0(s)| < \epsilon.$$

Dado $\lambda \in [0, 1]$, temos:

$$\lambda d(f, 0) = \lambda \sup_{s \in [0, \mathbb{M}]} |f(s)| < \lambda \epsilon \quad \text{e}$$

$$(1 - \lambda)d(g, 0) = (1 - \lambda) \sup_{s \in [0, \mathbb{M}]} |g(s)| < (1 - \lambda)\epsilon.$$

Somando essas duas desigualdades, obtemos:

$$\lambda d(f, 0) + (1 - \lambda)d(g, 0) = \lambda \sup_{s \in [0, \mathbb{M}]} |f(s)| + (1 - \lambda) \sup_{s \in [0, \mathbb{M}]} |g(s)| < \epsilon.$$

Como f e g são limitadas,

$$\sup_{s \in [0, \mathbb{M}]} (\lambda |f(s)| + (1 - \lambda)|g(s)|) \leq \lambda \sup_{s \in [0, \mathbb{M}]} |f(s)| + (1 - \lambda) \sup_{s \in [0, \mathbb{M}]} |g(s)| < \epsilon.$$

Ou seja, $d(\lambda f + (1 - \lambda)g, 0) < \epsilon$. Portanto, $(\lambda f + (1 - \lambda)g) \in V_0$, como queríamos demonstrar. Assim, \mathcal{Z} é localmente convexo, já que como apresentado em Schaefer (1966) produtos de espaços localmente convexos são também espaços localmente convexos. □

Observe que o espaço \mathcal{Z} é um espaço de Suslin.

Definido o conjunto de ações do jogo, podemos caracterizar o conjunto de ações para cada jogador α e o conjunto dos perfis de ações puras.

Sejam $\mathcal{Z}_n^\alpha \subset \mathcal{Z}_n$ para todo $n = 1, 2, \dots$. Então, o conjunto $\mathcal{Z}^\alpha = \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{Z}_n^\alpha \subset \mathcal{Z}$ é o conjunto de ações do jogador α .

Seja também a multifunção $\Sigma : I \rightarrow 2^{\mathcal{Z}}$ definida por $\Sigma(\alpha) \triangleq \mathcal{Z}^\alpha$, a qual descreve o conjunto de ações \mathcal{Z}^α para cada jogador $\alpha \in I \triangleq [0, 1]$.

Vamos assumir que \mathcal{Z}^α e Σ satisfazem a seguinte hipótese:

Hipótese 3. *Para todo $\alpha \in I$ o conjunto \mathcal{Z}^α é compacto e o gráfico $D \triangleq \{(\alpha, z) \in I \times \mathcal{Z} : z \in \mathcal{Z}^\alpha\}$ da multifunção Σ pertence a $\mathcal{I} \times \mathcal{B}(\mathcal{Z})$, onde $\mathcal{B}(\mathcal{Z})$ representa a σ -álgebra de Borel sobre \mathcal{Z} , isto é, a σ -álgebra gerada pelos subconjuntos abertos de \mathcal{Z} .*

Denotaremos por \mathcal{D} a σ -álgebra $D \cap (\mathcal{I} \times \mathcal{B}(\mathcal{Z}))$. Seja $\mathcal{S}_\Sigma(I) \triangleq \mathcal{S}_\Sigma$ o conjunto de todas as funções mensuráveis $f : I \rightarrow \mathcal{Z}$ com $f(\alpha) \in \mathcal{Z}^\alpha$ quase certamente (a.e.) para todos $\alpha \in I$. Ou seja, $f(\alpha) = (f_1(\alpha), f_2(\alpha), f_3(\alpha), \dots)$ tal que $f_n(\alpha) \in \mathcal{Z}_n^\alpha$ para todo $n = 1, 2, \dots$, quase certamente para todos $\alpha \in I$.

Como $f(\alpha) \in \mathcal{Z}_n^\alpha \subset \mathcal{Z}_n$, podemos afirmar que existe c^α tal que $f_n(\alpha) = b_n^\alpha = c^\alpha(s_{n-1}^\alpha)$, onde s_{n-1}^α é a realização da variável $S_{n-1}(\alpha)$.

Assim, dada uma riqueza inicial s_0^α , temos que,

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= (f_1(\alpha), f_2(\alpha), f_3(\alpha), \dots) \\ &= (b_1^\alpha, b_2^\alpha, b_3^\alpha, \dots) \\ &= (c^\alpha(s_0^\alpha), c^\alpha(s_1^\alpha), c^\alpha(s_2^\alpha), \dots). \end{aligned}$$

Matematicamente, \mathcal{S}_Σ representa o conjunto de todas as seleções mensuráveis quase certa (a.e.) da multifunção Σ e, em termos do jogo, \mathcal{S}_Σ é o conjunto de todos os perfis de ações puras.

A hipótese 3 se faz necessária para garantirmos que \mathcal{S}_Σ é um conjunto não vazio. Lembrando que \mathcal{Z} é um espaço de Suslin, basta aplicarmos o teorema de seleção mensurável de von Neumann-Aumann, reproduzido no anexo (Teorema 5.3), a $(T, \tau) \equiv (I, \mathcal{I})$, $S \equiv Z$ e $\Gamma \equiv \Sigma$.

2.2 Payoff

A realização de um perfil de ação traz benefícios pessoais para os jogadores. Naturalmente, é importante para cada jogador α distinguir os benefícios internos, sobre os quais o jogador α tem controle total, dos benefícios externos, sobre os quais o jogador α pode ter apenas influência parcial. Uma maneira de fazer esta distinção é definir a função payoff decompondo-a (Balder (1995)). Para tanto, vamos supor que exista:

- (i) um espaço V , denominado espaço das estatísticas dos perfis do jogo;
- (ii) uma função $U^\alpha : Z^\alpha \times V \rightarrow [-\infty, +\infty]$ e;
- (iii) uma aplicação $d : \mathcal{S}_\Sigma \rightarrow V$, denominada aplicação externalidade.

Hipótese 4. *Seja $V \triangleq \mathbf{R}$. A aplicação externalidade $d : \mathcal{S}_\Sigma \rightarrow V$ é da seguinte forma: $d(f) \triangleq \int_I f(\alpha) \mu(d\alpha) = (\int_I b_1^\alpha \mu(d\alpha), \int_I b_2^\alpha \mu(d\alpha), \int_I b_3^\alpha \mu(d\alpha), \dots)$.*

Assumimos que a aplicação $(\alpha, \omega) \mapsto b_n^\alpha(\omega)$ é $\mathcal{I} \otimes \mathcal{F}_{n-1}$ mensurável, onde $\mathcal{F}_{n-1} \triangleq \bigvee_{\alpha} \mathcal{F}_{n-1}^\alpha$ é a menor σ -álgebra contendo \mathcal{F}_{n-1}^α para todo $\alpha \in I$.

Consequentemente, a oferta total em cada período n ,

$$B_n(\omega) \triangleq \int_I b_n^\alpha(\omega) \mu(d\alpha) > 0$$

é uma variável aleatória bem definida, a qual assumimos ser estritamente positiva. Assim,

$$d(f) = (B_1, B_2, B_3, \dots) \tag{3}$$

é o vetor oferta.

Vamos agora caracterizar um perfil socialmente factível do jogo. Seja $A : I \times V \rightarrow 2^Z$ uma multifunção. Um perfil de ação $f \in \mathcal{S}_\Sigma$ é dito socialmente factível se $f(\alpha) \in A(\alpha, d(f))$ quase certamente (a.e.) para todo $\alpha \in I$.

Hipótese 5. *A multifunção $A : I \times V \rightarrow 2^Z$ possui valores fechados não vazios e satisfaz*

$$A(\alpha, d(f)) \subset Z^\alpha \text{ para todo } (\alpha, f) \in I \times \mathcal{S}_\Sigma.$$

Além disso, para todo $\alpha \in I$, a multifunção $A(\alpha, \cdot) \triangleq A^\alpha : V \rightarrow Z^\alpha$ é contínua e o gráfico de A , dado por $\{(\alpha, z, v) \in D \times V : z \in A(\alpha, v)\}$, pertence a $\mathcal{D} \times \mathcal{B}(V)$.

O jogador que tomou emprestado pode entrar em *default* no período n quando não possui riqueza suficiente para quitar integralmente a dívida adquirida no período anterior. Entretanto, mesmo entrando em *default*, o jogador continua no jogo, sofrendo uma penalidade não pecuniária. Essa penalidade é materializada por meio da função utilidade, a qual pode ser distinta para cada jogador e deve satisfazer às propriedades especificadas na hipótese abaixo.

Hipótese 6. *Cada jogador α tem uma função utilidade $u^\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, limitada, estritamente crescente, côncava em todo seu domínio e estritamente côncava em $[0, \infty)$, diferenciável em todo $x \neq 0$ e tal que:*

$$u^\alpha(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } x > 0; \\ = 0 & \text{se } x = 0; \\ < 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Além disso, $u'_+(0) > 0$.

A utilidade negativa mede a "desutilidade" de o jogador não pagar o débito adquirido no período anterior, enquanto a utilidade positiva mede a utilidade que o jogador usufrui ao consumir x unidades de mercadoria.

No início do período n o preço da mercadoria é $p_{n-1}(\omega)$ (do período anterior). Um jogador inicia o período n com riqueza $S_{n-1}^\alpha(\omega)$. Se $S_{n-1}^\alpha(\omega) < 0$, então o jogador α não quitou seu débito do período anterior, e então, recebe uma penalidade não monetária de $u^\alpha(S_{n-1}^\alpha(\omega)/p_{n-1})$. Após a formação do preço p_n para o período n , conforme equação (15), apresentada na subseção 2.4, cada jogador recebe a quantidade de mercadoria $x_n^\alpha \triangleq b_n^\alpha(\omega)/p_n(\omega)$ a que tem direito de acordo com a oferta de compra feita. Como a mercadoria é

perecível, ela é consumida no mesmo período e, portanto, o jogador recebe $u^\alpha(x^\alpha(\omega))$ em utilidade. Assim, a utilidade total que o jogador α recebe durante o período n é:

$$\xi_n^\alpha(\omega) \triangleq \begin{cases} u^\alpha(x_n^\alpha(\omega)) & \text{se } S_{n-1}^\alpha(\omega) \geq 0; \\ u^\alpha(x_n^\alpha(\omega)) + u^\alpha(S_{n-1}^\alpha(\omega)/p_{n-1}(\omega)) & \text{se } S_{n-1}^\alpha(\omega) < 0. \end{cases}$$

O *payoff* total para o jogador α durante todo o jogo é a soma descontada das utilidades totais, ou seja, $\sum_{n=1}^{\infty} \beta^{n-1} \xi_n^\alpha(\omega)$.

Observe que o *payoff* total é função das ações do jogador α , de seu nível de riqueza e do preço da mercadoria. Como o nível de riqueza é função das ações do jogador e o preço, que é determinado como explicitado na equação (15), na subseção 2.4, depende do vetor oferta dado pela equação (3), o qual está contido em V , podemos definir a função payoff do jogo para o jogador α tal como em Balder (1999):

$$U^\alpha : \mathcal{Z}^\alpha \times V \longrightarrow [-\infty, +\infty] \quad \text{tal que} \quad U^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \beta^{n-1} \xi_n^\alpha.$$

Como u_α é limitada, ξ_n^α é limitada também. Assim, U^α converge uniformemente, já que $\sum_{n=1}^{\infty} \beta^{n-1}$ é convergente.

Dado um perfil de ação $f \in \mathcal{S}_\Sigma$, o *payoff* do jogador α será $U^\alpha(z, d(f))$ se ele trocar a ação do perfil prescrito $f(\alpha)$ pela ação $z \in \mathcal{Z}^\alpha$.

Seja $U : D \times V \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ a função dada por $U(\alpha, z, v) \triangleq U^\alpha(z, v)$.

Hipótese 7. Para todo $\alpha \in I$ a função U_α é contínua sobre $\mathcal{Z}^\alpha \times V$ e para todo $v \in V$ a função $U(\cdot, \cdot, v)$ é \mathcal{D} -mensurável.

2.3 Processo de formação de riqueza

Cada jogador α inicia o período n com a riqueza do período anterior (S_{n-1}^α). Com esta informação e ciente de seu limite de endividamento, o jogador decide quanto vai ofertar (b_n^α) para adquirir o bem perecível da economia para o seu consumo. Ao decidir o valor de sua oferta, o jogador se enquadrará em uma das três possibilidades: ser depositante, ser tomador de empréstimo ou nenhum dos dois. Neste momento, há incerteza sobre a dotação que vai receber. Após todos os jogadores terem feito suas ofertas, o preço $p_n(\omega)$ é formado conforme a equação (15), a qual será definida na subseção 2.4, e as dotações $Y_n^\alpha(\omega)$ dos jogadores são reveladas. Assim, cada jogador recebe $p_n(\omega)Y_n^\alpha(\omega)$ em moeda fiduciária e o valor de sua oferta em unidades da mercadoria ($x_n^\alpha \triangleq b_n^\alpha(\omega)/p_n(\omega)$). Dado que a mercadoria é perecível, o jogador consome integralmente as unidades recebidas. Ao final do período n

o jogador recebe seus depósitos com juros se for depositante. Se for tomador de empréstimo, paga sua dívida com juros até o limite de sua riqueza. O restante é perdoado e ele recebe uma punição não pecuniária na forma de utilidade negativa. Assim, sua riqueza é definida. Este processo de formação de riqueza do jogador é detalhado abaixo para cada uma das três possibilidades mencionadas acima.

(i) *O jogador α é um depositante*

Nesse caso, a oferta b_n^α do jogador é estritamente menor que sua riqueza $(S_{n-1}^\alpha(\omega))^+ = S_{n-1}^\alpha(\omega)$ e então o jogador deposita (ou empresta)

$$d_n^\alpha \triangleq S_{n-1}^\alpha(\omega) - b_n^\alpha = (S_{n-1}^\alpha(\omega))^+ - b_n^\alpha. \quad (4)$$

A fim de obtermos uma única equação para o nível de riqueza do jogador, estabeleceremos que d_n^α é igual a 0 se $b_n^\alpha \geq (S_{n-1}^\alpha(\omega))^+$.

Ao final do período, o jogador α recebe seu depósito com juros e sua dotação é transformada em moeda, obtendo assim, o seu novo nível de riqueza:

$$S_n^\alpha(\omega) \triangleq r_{2n}(\omega)d_n^\alpha + p_n(\omega)Y_n^\alpha(\omega) > 0. \quad (5)$$

(ii) *O jogador α é um tomador de empréstimo*

Aqui a oferta b_n^α do jogador α excede sua riqueza $(S_{n-1}^\alpha(\omega))^+$ e, portanto, o mesmo toma emprestado a diferença:

$$e_n^\alpha \triangleq b_n^\alpha - (S_{n-1}^\alpha(\omega))^+. \quad (6)$$

De forma semelhante à situação anterior, estabeleceremos que e_n^α é igual a 0 se $b_n^\alpha \leq (S_{n-1}^\alpha(\omega))^+$.

Ao final do período, o jogador deve ao banco $r_{1n}(\omega)e_n^\alpha(\omega)$ e seu novo nível de riqueza é

$$S_n^\alpha(\omega) \triangleq p_n(\omega)Y_n^\alpha(\omega) - r_{1n}(\omega)e_n^\alpha(\omega), \quad (7)$$

sendo que esse montante pode ser negativo. O jogador α deve obrigatoriamente pagar o seu débito até o máximo que sua riqueza permite. Assim, o jogador pagará a seguinte quantia de seu empréstimo:

$$h_n^\alpha(\omega) \triangleq \min\{r_{1n}(\omega)e_n^\alpha(\omega), p_n(\omega)Y_n^\alpha(\omega)\} \quad (8)$$

e a quantia de moeda que possuirá ao final do período será

$$(S_n^\alpha(\omega))^+ = p_n(\omega)Y_n^\alpha(\omega) - h_n^\alpha(\omega). \quad (9)$$

(iii) *O jogador α não é depositante nem tomador de empréstimo*

Nesse caso o jogador oferta toda sua dotação monetária, $b_n^\alpha(\omega) = (S_{n-1}^\alpha(\omega))^+$ e ao final do período sua riqueza é exatamente a dotação recebida em moeda,

$$S_n^\alpha(\omega) = p_n(\omega)Y_n^\alpha(\omega) > 0. \quad (10)$$

Usando a notação das equações 4-9, temos uma única fórmula para o nível de riqueza do jogador α ao final do período n :

$$S_n^\alpha(\omega) = p_n(\omega)Y_n^\alpha(\omega) + r_{2n}(\omega)d_n^\alpha(\omega) - r_{1n}(\omega)e_n^\alpha(\omega), \quad (11)$$

a qual pode ser negativa, e outra fórmula para o montante de moeda que o jogador detém em mão:

$$(S_n^\alpha(\omega))^+ = p_n(\omega)Y_n^\alpha(\omega) + r_{2n}(\omega)d_n^\alpha(\omega) - h_n^\alpha(\omega). \quad (12)$$

Assim, dado que um jogador α tem uma riqueza inicial S_0^α , o processo de formação dos sucessivos níveis de riqueza de um jogador é uma cadeia de Markov com espaço-estado $\mathcal{E} = [-K^\alpha r_1, \infty)$, a qual satisfaz a regra:

$$S_n = g(S_{n-1}^+ - c(S_{n-1}^+)) + p_n Y_n, n \geq 1 \quad (13)$$

onde as variáveis dotação Y_1, Y_2, \dots são independentes com distribuição comum λ e $g(\cdot)$ é a função

$$g(a; r_1, r_2) \triangleq \begin{cases} r_1 a, & a \leq 0; \\ r_2 a, & a > 0. \end{cases}$$

2.4 Conservação da moeda

Seja $M_n(\omega)$ o total de moeda fiduciária detida pelo banco e

$$\tilde{M}_n(\omega) \triangleq \int (S_n^\alpha(\omega))^+ \mu(d\alpha) \quad (14)$$

o total de moeda fiduciária detida pelos jogadores, ambos ao final do período n . Assim, a riqueza total em moeda na economia é $W_n(\omega) \triangleq M_n(\omega) + \tilde{M}_n(\omega)$. Considere a regra:

$$p_n(\omega) = \frac{B_n(\omega)}{Q_n(\omega)}, \quad (15)$$

a qual determina o preço da mercadoria como razão da oferta total sobre a produção total. Essa regra nos dá a condição necessária e suficiente para a conservação da moeda, conforme demonstrado no Lema abaixo.

Lema 2.4.1. *O total de moeda fiduciária $W_n(\omega) \triangleq M_n(\omega) + \tilde{M}_n(\omega)$ na economia é a mesma em todo período n e para qualquer ω se e somente se a equação (15) for válida.*

Demonstração. A demonstração está no anexo. □

3 Equilíbrio

Conforme dito anteriormente, as taxas de juros são estabelecidas pelo banco central. Por não impormos restrições às taxas de juros na definição abaixo, assumimos implicitamente que o banco estabelece essas taxas arbitrariamente e que há moeda o suficiente para cobrir toda a demanda por empréstimos e atender a todos os depositantes, em cada período.

Definição 3.1. *Um equilíbrio é um sistema de taxa de juros e preços $\{\bar{r}_1 = (r_{11}, r_{12}, \dots), \bar{r}_2 = (r_{21}, r_{22}, \dots), \bar{p} = (p_1, p_2, \dots)\}$ e uma coleção de perfis socialmente factíveis $\Pi = \{f^*(\alpha) = (b_1^\alpha, b_2^\alpha, \dots), \alpha \in I\}$ tal que:*

- (i) *os preços $p_n, n = 1, 2, \dots$ satisfazem a equação(15), e*
- (ii) *dado S_0^α o nível de riqueza inicial do jogador α , o perfil $f^*(\alpha) \in \Pi$ é tal que*

$$f^*(\alpha) \in \operatorname{argmax}_{z \in A_\alpha(d(f^*))} U_\alpha(z, d(f^*)) \text{ para quase certamente todo } \alpha \in I.$$

Teorema 3.1 (Existência de equilíbrio). *Dado que o espaço de medida (I, \mathcal{I}, μ) é completo e separável, sob as hipóteses (3)-(7), o jogo $\Gamma \triangleq (I, \Sigma, U, A)$ tem um equilíbrio de Nash socialmente factível em perfis de ações puras.*

A demonstração da existência de equilíbrio de perfis de ações puras é feita como em Balder (1999), por meio de purificação do equilíbrio de perfis de ações mistas. Assim, inicialmente formularemos uma versão do jogo Γ

para perfis de ações mistas e, em seguida, demonstraremos a existência de equilíbrio para estes perfis. Com esse resultado estabelecido, demonstraremos o Teorema 3.1.

Seja $M_1^+(\mathcal{Z})$ o conjunto de todas as medidas de probabilidade sobre $(\mathcal{Z}, \mathcal{B}(\mathcal{Z}))$.

Definição 3.2 (Topologia fina para probabilidades). *A topologia fina sobre $M_1^+(\mathcal{Z})$ é a menor topologia para a qual todas as funções $\vartheta \rightarrow \int_{\mathcal{Z}} c(z)\vartheta(dz)$, $c \in C_b(\mathcal{Z})$, são contínuas.*

Definição 3.3 (Probabilidade de transição). *Uma probabilidade de transição (medida Young) de (I, \mathcal{I}, μ) sobre \mathcal{Z} é uma função $\delta : I \rightarrow M_1^+(\mathcal{Z})$, a qual é mensurável com respeito a \mathcal{I} e a $\mathcal{B}(M_1^+(\mathcal{Z}))$, onde $M_1^+(\mathcal{Z})$ é munida com a topologia fina da definição 3.2.*

Seja $\mathcal{R}_{\mathcal{Z}}(I) \triangleq \mathcal{R}_{\mathcal{Z}}$ o conjunto de todas as probabilidades de transição de I sobre \mathcal{Z} e seja $\mathcal{R}_{\Sigma}(I) \triangleq \mathcal{R}_{\Sigma}$ o conjunto de toda probabilidade de transição $\delta \in \mathcal{R}_{\mathcal{Z}}$ tal que $\delta(\alpha)(\mathcal{Z}^{\alpha}) = 1$ para quase certamente todo $\alpha \in I$. Os elementos de \mathcal{R}_{Σ} são ditos perfis de ações mistas.

Definição 3.4. *A topologia fina (topologia da medida Young) sobre $\mathcal{R}_{\mathcal{Z}}$ é a menor topologia para a qual todos os funcionais integrais*

$$F_g : \delta \rightarrow \int_I \left[\int_{\mathcal{Z}} g(\alpha, s) \delta(\alpha)(ds) \right] \mu(d\alpha), g \in \mathcal{G}_C, \quad (16)$$

são contínuos. \mathcal{G}_C é o conjunto de todos os integrandos de Carathéodory sobre $I \times \mathcal{Z}$, isto é, o conjunto de todas as funções $\mathcal{I} \times \mathcal{B}(\mathcal{Z})$ -mensurável $g : I \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $g(\alpha, \cdot)$ é contínua sobre \mathcal{Z} para todo $\alpha \in I$ e $\sup_{s \in \mathcal{Z}} |g(\alpha, s)| \leq \phi(\alpha)$ para algum $\phi \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}^1(I)$.

A definição acima de topologia fina sobre $\mathcal{R}_{\mathcal{Z}}$ se estende naturalmente para $\mathcal{M}_{\mathcal{Z}}$, o menor espaço vetorial que contém $\mathcal{R}_{\mathcal{Z}}$ e o funcional integral (16) continua bem definido para $\mathcal{M}_{\mathcal{Z}}$. Assim, continuaremos nos referindo a essa topologia como topologia fina. A topologia fina sobre \mathcal{R}_{Σ} é definida por meio de restrição. Pelo Teorema 1(i) de Balder (1996), reproduzido no anexo (Teorema 5.4), temos que a topologia fina sobre \mathcal{R}_{Σ} é a menor topologia para a qual todos os funcionais integrais $F_g, g \in \mathcal{G}_{C, \Sigma}$, são contínuos, sendo que $\mathcal{G}_{C, \Sigma}$ é o conjunto de todas as funções de Carathéodory sobre D . Equivalentemente, essa topologia é a menor topologia para a qual todos os funcionais integrais $F_g : \mathcal{R}_{\Sigma} \rightarrow (-\infty, +\infty], g \in \mathcal{G}_{\Sigma}^{bb}$, são semicontínuas inferiormente, onde $\mathcal{G}_{\Sigma}^{bb}$ é o conjunto de todos os integrandos normais sobre D que são limitados abaixo integralmente, isto é, o conjunto de todas as funções \mathcal{D} -mensuráveis $g : D \rightarrow (-\infty, +\infty]$ tal que $g(\alpha, \cdot)$ é semicontínua

inferiormente sobre \mathcal{Z}^α para todo $\alpha \in I$ e $g(\alpha, s) \geq \phi(\alpha)$ para algum $\phi \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}^1(I)$.

Proposição 3.1. \mathcal{R}_Σ é um subconjunto não vazio, compacto, convexo e metrizable do espaço semimetrizável $\mathbf{M}_{\mathcal{Z}}$.

Demonstração. Vimos que \mathcal{S}_Σ é não vazio, ou seja, existe $f : I \rightarrow \mathcal{Z}$ com $f(\alpha) \in \mathcal{Z}^\alpha$ quase certamente (a.e.) para todos $\alpha \in I$. Então, definimos

$$\delta_f(\alpha)(\mathcal{Z}^\alpha) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{se } f(\alpha) \in \mathcal{Z}^\alpha; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$\delta_f \in \mathcal{R}_\Sigma$. Portanto, \mathcal{R}_Σ é não vazio.

Defina $h_\Sigma : I \times \mathcal{Z} \rightarrow [0, +\infty]$ por:

$$h_\Sigma(\alpha, z) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{se } z \in \Sigma(\alpha) = \mathcal{Z}^\alpha; \\ +\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, h_Σ é um integrando normal inf-compacto limitado abaixo integralmente. Então, pelo teorema 1 (ii) de Balder (1996) reproduzido no anexo, o funcional integral $F_{h_\Sigma}(\delta) \triangleq \int_I \left[\int_{\mathcal{Z}} h_\Sigma(\alpha, z) \delta(\alpha)(dz) \right] \mu(d\alpha)$ é inf-compacto sobre $\mathcal{R}_{\mathcal{Z}}$, considerando a topologia fina. Como \mathcal{R}_Σ é o conjunto de todos os $\delta \in \mathcal{R}_{\mathcal{Z}}$ tal que $F_{h_\Sigma}(\delta) \leq 0$, segue que \mathcal{R}_Σ é compacto.

Para demonstrar a convexidade, temos que mostrar que a combinação convexa de duas probabilidades de transição δ_1 e δ_2 pertencentes a \mathcal{R}_Σ é um elemento de \mathcal{R}_Σ .

Seja $\lambda \in [0, 1]$. Obviamente, $\lambda\delta_1(\alpha) + (1 - \lambda)\delta_2(\alpha)$ é uma probabilidade de transição.

$$\begin{aligned} [\lambda\delta_1(\alpha) + (1 - \lambda)\delta_2(\alpha)](\mathcal{Z}^\alpha) &= \lambda\delta_1(\alpha)(\mathcal{Z}^\alpha) + (1 - \lambda)\delta_2(\alpha)(\mathcal{Z}^\alpha) \\ &= \lambda + (1 - \lambda) \\ &= 1, \end{aligned}$$

já que $\delta_1(\alpha)(\mathcal{Z}^\alpha) = \delta_2(\alpha)(\mathcal{Z}^\alpha) = 1$, pois $\delta_1 \in \mathcal{R}_\Sigma$ e $\delta_2 \in \mathcal{R}_\Sigma$.

Portanto, $\lambda\delta_1(\alpha) + (1 - \lambda)\delta_2(\alpha) \in \mathcal{R}_\Sigma$. □

Definidos os perfis de ações mistos, vamos agora definir uma versão mista da aplicação externalidade d . Seja $e : \mathcal{R}_\Sigma \rightarrow Y$ tal que

$$e(\delta) \triangleq \left(\int_I \left[\int_{\mathcal{Z}} g_1(\alpha, z) \delta(\alpha)(dz) \right] \mu(d\alpha), \int_I \left[\int_{\mathcal{Z}} g_2(\alpha, z) \delta(\alpha)(dz) \right] \mu(d\alpha), \dots \right)$$

Teorema 3.2. (*Existência de equilíbrio misto*) Dado que o espaço de medida (I, \mathcal{I}, μ) é completo e separável, sob as hipóteses (3)-(6), o jogo $\Gamma \triangleq (I, \Sigma, U, A)$ possui um equilíbrio de Nash socialmente factível em perfis de ações mistas, isto é, existe $\delta^* \in \mathcal{R}_\Sigma$ tal que

$$\delta^*(\alpha)(\operatorname{argmax}_{z \in A^\alpha(e(\delta^*))} U^\alpha(z, e(\delta^*))) = 1 \text{ para quase certamente todo } \alpha \in I$$

Lema 3.1. A aplicação $e : \mathcal{R}_\Sigma \rightarrow Y$ é contínua.

Demonstração. Basta lembrar que cada componente da aplicação g é um funcional integral $F_{g_n}, n = 1, 2, \dots$, o qual é contínuo (considerando a topologia fina). \square

Vamos definir $H : \mathcal{R}_\Sigma \rightarrow 2^{\mathcal{R}_\Sigma}$ por

$$H(\delta) \triangleq \{ \eta \in \mathcal{R}_\Sigma : \eta(\alpha)(M_\delta(\alpha)) = 1 \text{ quase certamente} \},$$

onde $M_\delta(\alpha) \triangleq \operatorname{argmax}_{z \in A_\alpha(e(\delta))} U^\alpha(z, e(\delta))$.

Lema 3.2. A multifunção H é semicontínua superiormente e possui valores não vazios, fechados e convexos.

Demonstração. Seja $g \in \mathcal{G}_C$. Como \mathcal{G}_C , é um espaço vetorial, aplicando a Proposição 22.4 de Choquet (1969), temos que \mathcal{G}_C pode ser identificado com o dual topológico de \mathcal{M}_Z , o espaço vetorial expandido por \mathcal{R}_Z . A dualidade correspondente é $(\delta, g) \rightarrow F_g(\delta)$ (observe que a equação 16 estende automaticamente para \mathcal{M}_Z). Pelo teorema da redução (Teorema 3 de Balder (1996)), temos que

$$\sup_{\eta \in H(\delta)} F_g(\eta) = \int_I m_\delta(\alpha) \mu(d\alpha),$$

onde $m_\delta(\alpha) \triangleq \sup_{z \in M_\delta(\alpha)} g(\alpha, z)$. Pelo Lema Fatou e pelo fato de \mathcal{R}_Σ ser metrizable (Proposição 3.1), é suficiente checar que $\delta \rightarrow m_\delta(\alpha)$ é semicontínua superiormente para todo α , considerando a topologia fina.

$H(\delta)$ não vazio segue pelos argumentos clássicos de seleção mensurável.

Para provar que H possui valores fechados, seguiremos o Corolário 1 em Balder (1996) e sua demonstração observando que para qualquer par $\delta, \eta \in \mathcal{R}_\Sigma$ há equivalência entre $\eta \in H(\delta)$ e

$$F_{g_\delta} \triangleq \int_I \left[\int_Z g_\delta(\alpha, z) \eta(\alpha) dz \right] \mu(d\alpha) \leq \int_I \inf_{z \in Z^\alpha} g_\delta(\alpha, z) \mu(d\alpha),$$

onde

$$g_\delta(\alpha, z) \triangleq \begin{cases} -\arctan U(\alpha, z, e(\delta)) & \text{se } z \in A^\alpha(e(\delta)); \\ +\infty, & \text{se } z \in S^\alpha \setminus A^\alpha(e(\delta)). \end{cases}$$

define um integrando $g_\delta \in \mathcal{G}_\Sigma^{bb}$. Note que a função $\alpha \rightarrow \inf_{z \in Z^\alpha} g_\delta(\alpha, z)$ é certamente integrável por um teorema de projeção mensurável. Agora, F_{g_δ} é semicontínua inferiormente (considerando a topologia fina) por $g_\delta \in \mathcal{G}_\Sigma^{bb}$. Assim, $H(\delta)$ é fechado (considerando a topologia fina).

Sejam $\eta_1, \eta_2 \in H(\delta)$ e $\lambda \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} [\lambda\eta_1(\alpha) + (1 - \lambda)\eta_2(\alpha)](M_\delta(\alpha)) &= \lambda\eta_1(\alpha)(M_\delta(\alpha)) + (1 - \lambda)\eta_2(\alpha)(M_\delta(\alpha)) \\ &= \lambda + (1 - \lambda) \\ &= 1, \text{ q.c.} \end{aligned}$$

pois $\eta_1(\alpha)(M_\delta(\alpha)) = \eta_2(\alpha)(M_\delta(\alpha)) = 1$ q.c..

Portanto, $\lambda\eta_1(\alpha) + (1 - \lambda)\eta_2(\alpha) \in H(\delta)$. Ou seja, H possui valores convexos. \square

Demonstração do Teorema equilíbrio misto (Teorema 3.2.) Basta aplicar o Teorema de Kakutani (Teorema 5.6 do Anexo) a \mathcal{B}_Σ e H , observando que a Proposição 3.1 e o Lema 3.2, garantem que as hipóteses requeridas pelo Teorema de Kakutani são satisfeitas. Assim, existe um perfil de ação mista $\delta^* \in \mathcal{B}_\Sigma$ tal que $\delta^* \in H(\delta^*)$, isto é, tal que $\delta^*(\alpha)(M_{\delta^*}(\alpha)) = 1$ quase certamente para todo α . \square

Lema 3.3. (Lema 3.4.1 de Balder (1995), p.90) *Sejam \mathcal{Z} um espaço métrico de Suslin, (I, \mathcal{I}, μ) um espaço de probabilidade não atômica, Z^α subconjunto não vazio e compacto de \mathcal{Z} para todo $\alpha \in I$ e $g_1, \dots, g_n : I \times \mathcal{Z} \rightarrow (-\infty, +\infty)$ limitada abaixo integralmente e $\mathcal{I} \times \mathcal{B}(\mathcal{Z})$ -mensurável, tal que $g_i(\alpha, \cdot)$ é semicontínua inferiormente sobre \mathcal{Z} para cada $\alpha, i = \dots, n$. Então, para todo $\delta \in \mathcal{B}_\Sigma$ existe $f \in \mathcal{S}_\Sigma$ tal que*

$$\int_I g_i(\alpha, f(\alpha))\mu(dt) \leq \int_I \left[\int_{Z^\alpha} g_i(\alpha, z)\delta(\alpha)(dz) \right] \mu(dt), i = 1, \dots, n.$$

Demonstração do Teorema equilíbrio puro (Teorema 3.1). O Teorema 3.2 garante a existência do equilíbrio de perfil misto δ^* . Pelo Lema 3.3, existe $f^* \in \mathcal{S}_\Sigma$ tal que

$$\int_I (g_i(\alpha, f^*(\alpha))\mu(dt) = \int_I \left[\int_{Z^\alpha} g_i(\alpha, z)\delta^*(\alpha)(dz) \right] \mu(dt), i = 1, \dots, m.$$

A identidade acima implica que $e(\delta^*) = d(f^*)$. Assim, tomando $g(\alpha, z) = \text{arctang}U(\alpha, z, e(\delta^*))$, temos a seguinte identidade:

$$\int_I \text{arctang}U(\alpha, f^*(\alpha), d(f^*))\mu(dt) = \int_I \left[\int_{Z^\alpha} \text{arctang}(\alpha, z, e(\delta^*))\delta^*(\alpha)(dz) \right] \mu(dt).$$

Por δ^* ser um equilíbrio misto e o fato de $e(\delta^*) = d(f^*)$, a integral interna do lado direito da igualdade acima é igual a $\sup_{z \in A^\alpha(d(f^*))} \text{arctang}U(\alpha, z, d(f^*))$ quase certamente para todo $\alpha \in I$.

Isto implica que $f^*(\alpha) \in \text{argmax}_{z \in A^\alpha(d(f^*))} U^\alpha(z, d(f^*))$ quase certamente para todo $\alpha \in I$ devido a monotonicidade da transformação arco tangente. \square

4 Considerações finais

Este trabalho apresenta uma generalização do jogo apresentado por Geanakoplos et al. (2000). Os problemas de mensurabilidade que surgem ao se considerar os agentes de fato heterogêneos foram resolvidos utilizando-se o arcabouço teórico proposto por Balder (1999). Mostra-se a existência de equilíbrio de Nash, que é mais geral que o equilíbrio no estado estacionário cuja existência é demonstrada pelos autores no artigo original. O equilíbrio de Nash é um perfil de ações descrevendo o comportamento dos agentes ao longo do tempo e não só no estado estacionário, que seria um ponto de convergência. Neste trabalho, nós limitamos nossa investigação à existência de equilíbrio de Nash para o caso de taxas de juros exógenas. Seria interessante verificar a existência de equilíbrio de Nash para o caso de taxas de juros endógenas. No entanto, esta e outras questões como a unicidade do equilíbrio de Nash, formas funcionais da função utilidade, possíveis aplicações empíricas são deixadas como questões em aberto para futuras pesquisas.

5 Anexo

Definição 5.1. *Um espaço de Suslin é um espaço topológico de Hausdorff tal que existe um espaço Polonês P e uma aplicação contínua de P sobre S .*

Definição 5.2. *Um espaço Polonês é um espaço métrico separável completo.*

Teorema 5.1. [Funções Mensuráveis sobre $C(X, Y)$] - Aliprantis e Border (1994), p. 500] *Sejam (S, Σ) um espaço mensurável, X um espaço compacto metrizável e Y um espaço separável metrizável. Dote o subespaço $C(X, Y)$ de Y^X com sua topologia de convergência uniforme em vez de sua topologia de subespaço (topologia pontual).*

1. *Se $f : S \times X \rightarrow Y$ é uma função de Carathéodory (contínua em x e mensurável em s), então \hat{f} mapeia S sobre $C(X, Y)$ e é Borel mensurável.*
2. *Se $g : S \rightarrow C(X, Y)$ é Borel mensurável, então \bar{g} é uma função de Carathéodory.*

Teorema 5.2. *O produto de espaços Hausdorff é um espaço Hausdorff.*

Demonstração. Se x e y são elementos distintos do produto $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$, então $x_i \neq y_i$ para algum $i \in \mathbb{N}^*$. Se cada espaço coordenada é Hausdorff, então existem vizinhanças abertas distintas U e V de x_i e y_i , respectivamente, e $p_i^{-1}(U)$ e $p_i^{-1}(V)$ são vizinhanças de x e y no espaço produto. Portanto, o espaço produto é Hausdorff. \square

Teorema 5.3. [Seleção mensurável de von Neumann-Aumann (Teorema III.22 de Castaing e Valadier (1977), p.74)] *Sejam (T, τ) um espaço mensurável e S um espaço de Suslin. Seja Γ uma multifunção de T sobre subconjuntos não vazios de S , cujo gráfico G pertence a $\tau \otimes \mathcal{B}(S)$. Então existe uma sequência (σ_n) de seleções de Γ tal que, para todo $t, \{\sigma_n\}$ é denso em $\Gamma(t)$ e, σ_n é mensurável para $\hat{\tau}$ e $\mathcal{B}(S)$. Além disso, podemos escolher σ_n tal que: σ_n é o limite de uma sequência de funções $\hat{\tau}$ mensuráveis assumindo um número finito de valores e, se μ for uma medida Radon sobre T (se T é um espaço topológico de Hausdorff) então σ_n é μ -Lusin mensurável.*

Definição 5.3. *Seja (T, τ) um espaço mensurável. Se μ é uma medida positiva sobre (T, τ) , τ_μ denota o μ -completamento de τ . E $\hat{\tau}$ denota $\bigcap \tau_\mu$, para todas as medidas μ positivas limitadas.*

Observação: Os conjuntos pertencentes a $\hat{\tau}$ são ditos universalmente mensuráveis. Observe que se μ é uma medida σ -finita, então existe uma medida limitada que tem os mesmos conjuntos negligíveis. Observe também que se μ - é uma medida σ -finita sobre (T, τ) , então $\hat{\tau}_\mu = \tau_\mu$

Demonstração do Lema da Conservação da Moeda (Lema 2.4.1). Usando as equações (4)-(12) e (14), podemos ver que $d_n^\alpha(\omega) - e_n^\alpha(\omega) = (S_{n-1}^\alpha(\omega))^+ (b_n^\alpha(\omega))^+ - (b_n^\alpha(\omega) - (S_{n-1}^\alpha(\omega))^+)^+ = (S_{n-1}^\alpha(\omega))^+ - b_n^\alpha(\omega)$. Usando essa igualdade e a equação (15), temos que:

$$\begin{aligned}
M_n(\omega) - \tilde{M}_{n-1}(\omega) &= \int [d_n^\alpha(\omega) - e_n^\alpha(\omega) + h_n^\alpha(\omega) - r_{2n}(\omega)d_n^\alpha(\omega)]\mu(d\alpha) \\
&= \int [(S_{n-1}^\alpha(\omega))^+ - b_n^\alpha(\omega)]\mu(d\alpha) + \int [h_n^\alpha(\omega) - r_{2n}(\omega)d_n^\alpha(\omega)]\mu(d\alpha) \\
&= \tilde{M}_{n-1}(\omega) - p_n(\omega) \int Y_n^\alpha \mu(d\alpha) - \int [r_{2n}(\omega)d_n^\alpha(\omega) - h_n^\alpha(\omega)]\mu(d\alpha) \\
&= \tilde{M}_{n-1}(\omega) - \tilde{M}_n(\omega).
\end{aligned}$$

Portanto, $M_n(\omega) + \tilde{M}_n(\omega) = M_{n-1}(\omega) + \tilde{M}_{n-1}(\omega)$, ou seja, $W_n(\omega) = W_{n-1}(\omega)$. \square

Teorema 5.4 (Teorema 1(i) em Balder (1996), p.310). *Para todo $g \in \mathcal{G}_S^{bb}$ o integral funcional F_g é semicontínuo inferiormente (considerando a topologia fina) sobre $\mathcal{R}_S(I, \mathcal{I}, \mu)$*

Definição 5.4. *Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita inf-compacta se o conjunto $K_r = \{x \in X \mid f(x) \leq r\}$ é compacto para todo escalar r .*

Definição 5.5. *Integrandos (Balder (1996), p.309)*

(i) *Um integrando normal sobre $(I, \mathcal{I}, \mu) \times S$ é uma função $\mathcal{I} \times \mathcal{B}(S)$ -mensurável $g : I \times S \rightarrow [-\infty, +\infty]$ para a qual*

$g(\alpha, \cdot)$ é semicontínua inferiormente sobre S para todo $\alpha \in I$,

além disso, g é dita limitada abaixo integralmente (integrably bounded below) se existe $\phi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(I, \mathcal{I}, \mu)$ tal que

$$g(\alpha, s) \geq \phi(\alpha) \text{ para todo } \alpha \in I, s \in S.$$

O conjunto de todos os integrandos normais limitados abaixo integralmente sobre $(I, \mathcal{I}, \mu) \times S$ é denotado por $\mathcal{G}_S^{bb}(I, \mathcal{I}, \mu)$.

(ii) *Um integrando normal h sobre $(I, \mathcal{I}, \mu) \times S$ é dito inf-compacto se*

$h(\alpha, \cdot)$ é inf-compacto sobre S para todo $\alpha \in I$.

O conjunto de todos os integrandos normais inf-compactos limitados abaixo integralmente sobre $(I, \mathcal{I}, \mu) \times S$ é denotado por $\mathcal{H}_S^{bb}(I, \mathcal{I}, \mu)$.

(iii) Um integrando Carathéodory sobre $(I, \mathcal{I}, \mu) \times S$ é uma função $g : I \times S \rightarrow \mathbb{R}$ tal que g e $-g$ pertencem a $\mathcal{G}_S^{bb}(I, \mathcal{I}, \mu)$.

O conjunto de todos os integrandos Carathéodory sobre $(I, \mathcal{I}, \mu) \times S$ é denotado por $\mathcal{G}_S^C(I, \mathcal{I}, \mu)$.

Teorema 5.5 (Teorema de redução (Teorema 3 em Balder (1996) p.313)). Para todo $g \in \mathcal{G}_S^{bb}$, vale a identidade

$$\inf_{f \in \mathcal{L}_S^0(I, \mathcal{I}, \mu)} \int_I g(\alpha, f(\alpha)) \mu(dt) = \int_I \left[\inf_{s \in S} g(\alpha, s) \right] \mu(d\alpha)$$

desde que o lado esquerdo da igualdade seja diferente de $+\infty$.

Teorema 5.6 (Teorema de Kakutani). Seja $C \subset E$ compacto, convexo e não vazio. Seja $F : C \rightarrow 2^C$ uma multifunção com valores convexos, fechados e não vazios e tal que F é semicontínua superiormente, isto é, $\sigma(F(\cdot), x') : x \rightarrow \sup_{y \in F(x)} \langle y, x' \rangle$ é semicontínua superiormente sobre C para todo $x' \in E'$. Então, existe $x^* \in C$ tal que $x^* \in F(x)$.

Referências

ALIPRANTIS, C.; BORDER, K. *Infinite dimensional analysis - a hitchhiker's guide*. Berlin: Springer-Verlag, Inc, 1994.

BALDER, E. A unifying approach to existence of nash equilibria. *International Journal of Game Theory*, p. 79, 1995.

_____. Comments on the existence of cournot-nash-equilibria. *Journal of Mathematical Economics*, p. 307, 1996.

_____. On the existence of cournot-nash equilibria in continuum games. *Journal of Mathematical Economics*, p. 207, 1999.

CASTAING, C.; VALADIER, M. *Convex analysis and measurable multifunctions*. Berlin: Springer-Verlag, Inc, 1977. Lectures Notes in Mathematics, 580.

CHOQUET, C. *Lectures on Analysis*. [S.l.]: Benjamin, Reading, MA, 1969.

GEANAKOPOLOS, J.; KARATZAS, I.; SHUBIK, M.; SUDDERTH, W. A strategic market game with active bankruptcy. *Journal of Mathematical Economics*, p. 359, 2000.

HAHN, F. *Money and Inflation*. Cambridge, MA: MIT Press, 1983.

KARATZAS, I.; SHUBIK, M.; SUDDERTH, W. Construction of stationary markov equilibria in a strategic market game. *Mathematical of Operations Research*, p. 975, 1994.

_____. A strategic market game with secured lending. *Journal of Mathematical Economics*, p. 207, 1997.

SCHAEFER, H. *Topological Vector Spaces*. [S.l.]: Macmillan, 1966.

TSOMOCOS, D. Equilibrium analysis, banking and financial instability. *Journal of Mathematical Economics*, v. 39, p. 619–655, 2003.

Banco Central do Brasil

Trabalhos para Discussão

Os Trabalhos para Discussão do Banco Central do Brasil estão disponíveis para download no website
<http://www.bcb.gov.br/?TRABDISCLISTA>

Working Paper Series

The Working Paper Series of the Central Bank of Brazil are available for download at
<http://www.bcb.gov.br/?WORKINGPAPERS>

- | | | |
|------------|---|----------|
| 292 | Coping with a Complex Global Environment: a Brazilian perspective on emerging market issues <i>Adriana Soares Sales and João Barata Ribeiro Blanco Barroso</i> | Oct/2012 |
| 293 | Contagion in CDS, Banking and Equity Markets <i>Rodrigo César de Castro Miranda, Benjamin Miranda Tabak and Mauricio Medeiros Junior</i> | Oct/2012 |
| 293 | Contágio nos Mercados de CDS, Bancário e de Ações <i>Rodrigo César de Castro Miranda, Benjamin Miranda Tabak e Mauricio Medeiros Junior</i> | Out/2012 |
| 294 | Pesquisa de Estabilidade Financeira do Banco Central do Brasil <i>Solange Maria Guerra, Benjamin Miranda Tabak e Rodrigo César de Castro Miranda</i> | Out/2012 |
| 295 | The External Finance Premium in Brazil: empirical analyses using state space models <i>Fernando Nascimento de Oliveira</i> | Oct/2012 |
| 296 | Uma Avaliação dos Recolhimentos Compulsórios <i>Leonardo S. Alencar, Tony Takeda, Bruno S. Martins e Paulo Evandro Dawid</i> | Out/2012 |
| 297 | Avaliando a Volatilidade Diária dos Ativos: a hora da negociação importa? <i>José Valentim Machado Vicente, Gustavo Silva Araújo, Paula Baião Fisher de Castro e Felipe Noronha Tavares</i> | Nov/2012 |
| 298 | Atuação de Bancos Estrangeiros no Brasil: mercado de crédito e de derivativos de 2005 a 2011 <i>Raquel de Freitas Oliveira, Rafael Felipe Schiozer e Sérgio Leão</i> | Nov/2012 |
| 299 | Local Market Structure and Bank Competition: evidence from the Brazilian auto loan market <i>Bruno Martins</i> | Nov/2012 |
| 299 | Estrutura de Mercado Local e Competição Bancária: evidências no mercado de financiamento de veículos <i>Bruno Martins</i> | Nov/2012 |
| 300 | Conectividade e Risco Sistêmico no Sistema de Pagamentos Brasileiro <i>Benjamin Miranda Tabak, Rodrigo César de Castro Miranda e Sergio Rubens Stancato de Souza</i> | Nov/2012 |

- 300 Connectivity and Systemic Risk in the Brazilian National Payments System** Nov/2012
Benjamin Miranda Tabak, Rodrigo César de Castro Miranda and Sergio Rubens Stancato de Souza
- 301 Determinantes da Captação Líquida dos Depósitos de Poupança** Dez/2012
Clodoaldo Aparecido Annibal
- 302 Stress Testing Liquidity Risk: the case of the Brazilian Banking System** Dec/2012
Benjamin M. Tabak, Solange M. Guerra, Rodrigo C. Miranda and Sergio Rubens S. de Souza
- 303 Using a DSGE Model to Assess the Macroeconomic Effects of Reserve Requirements in Brazil** Jan/2013
Waldyr Dutra Areosa and Christiano Arrigoni Coelho
- 303 Utilizando um Modelo DSGE para Avaliar os Efeitos Macroeconômicos dos Recolhimentos Compulsórios no Brasil** Jan/2013
Waldyr Dutra Areosa e Christiano Arrigoni Coelho
- 304 Credit Default and Business Cycles: an investigation of this relationship in the Brazilian corporate credit market** Mar/2013
Jaqueline Terra Moura Marins and Myrian Beatriz Eiras das Neves
- 304 Inadimplência de Crédito e Ciclo Econômico: um exame da relação no mercado brasileiro de crédito corporativo** Mar/2013
Jaqueline Terra Moura Marins e Myrian Beatriz Eiras das Neves
- 305 Preços Administrados: projeção e repasse cambial** Mar/2013
Paulo Roberto de Sampaio Alves, Francisco Marcos Rodrigues Figueiredo, Antonio Negromonte Nascimento Junior e Leonardo Pio Perez
- 306 Complex Networks and Banking Systems Supervision** May/2013
Theophilos Papadimitriou, Periklis Gogas and Benjamin M. Tabak
- 306 Redes Complexas e Supervisão de Sistemas Bancários** Maio/2013
Theophilos Papadimitriou, Periklis Gogas e Benjamin M. Tabak
- 307 Risco Sistêmico no Mercado Bancário Brasileiro – Uma abordagem pelo método CoVaR** Jul/2013
Gustavo Silva Araújo e Sérgio Leão
- 308 Transmissão da Política Monetária pelos Canais de Tomada de Risco e de Crédito: uma análise considerando os seguros contratados pelos bancos e o spread de crédito no Brasil** Jul/2013
Debora Pereira Tavares, Gabriel Caldas Montes e Osmani Teixeira de Carvalho Guillén
- 309 Converting the NPL Ratio into a Comparable Long Term Metric** Jul/2013
Rodrigo Lara Pinto Coelho and Gilneu Francisco Astolfi Vivan
- 310 Banks, Asset Management or Consultancies' Inflation Forecasts: is there a better forecaster out there?** Jul/2013
Tito Nícias Teixeira da Silva Filho

- 311 **Estimação não-paramétrica do risco de cauda** Jul/2013
Caio Ibsen Rodrigues Almeida, José Valentim Machado Vicente e Osmani Teixeira de Carvalho Guillen
- 312 **A Influência da Assimetria de Informação no Retorno e na Volatilidade das Carteiras de Ações de Valor e de Crescimento** Jul/2013
Max Leandro Ferreira Tavares, Claudio Henrique da Silveira Barbedo e Gustavo Silva Araújo
- 313 **Quantitative Easing and Related Capital Flows into Brazil: measuring its effects and transmission channels through a rigorous counterfactual evaluation** Jul/2013
João Barata R. B. Barroso, Luiz A. Pereira da Silva and Adriana Soares Sales
- 314 **Long-Run Determinants of the Brazilian Real: a closer look at commodities** Jul/2013
Emanuel Kohlscheen
- 315 **Price Differentiation and Menu Costs in Credit Card Payments** Jul/2013
Marcos Valli Jorge and Wilfredo Leiva Maldonado
- 315 **Diferenciação de Preços e Custos de Menu nos Pagamentos com Cartão de Crédito** Jul/2013
Marcos Valli Jorge e Wilfredo Leiva Maldonado
- 316 **Política Monetária e Assimetria de Informação: um estudo a partir do mercado futuro de taxas de juros no Brasil** Jul/2013
Gustavo Araújo, Bruno Vieira Carvalho, Claudio Henrique Barbedo e Margarida Maria Gutierrez
- 317 **Official Interventions through Derivatives: affecting the demand for foreign exchange** Jul/2013
Emanuel Kohlscheen and Sandro C. Andrade
- 318 **Assessing Systemic Risk in the Brazilian Interbank Market** Jul/2013
Benjamin M. Tabak, Sergio R. S. Souza and Solange M. Guerra
- 319 **Contabilização da Cédula de Produto Rural à Luz da sua Essência** Jul/2013
Cássio Roberto Leite Netto
- 320 **Insolvency and Contagion in the Brazilian Interbank Market** Aug/2013
Sergio R. S. Souza, Benjamin M. Tabak and Solange M. Guerra
- 321 **Systemic Risk Measures** Aug/2013
Solange Maria Guerra, Benjamin Miranda Tabak, Rodrigo Andrés de Souza Penalosa and Rodrigo César de Castro Miranda
- 322 **Contagion Risk within Firm-Bank Bivariate Networks** Aug/2013
Rodrigo César de Castro Miranda and Benjamin Miranda Tabak
- 323 **Loan Pricing Following a Macro Prudential Within-Sector Capital Measure** Aug/2013
Bruno Martins and Ricardo Schechtman
- 324 **Inflation Targeting and Financial Stability: A Perspective from the Developing World** Sep/2013
Pierre-Richard Agénor and Luiz A. Pereira da Silva

