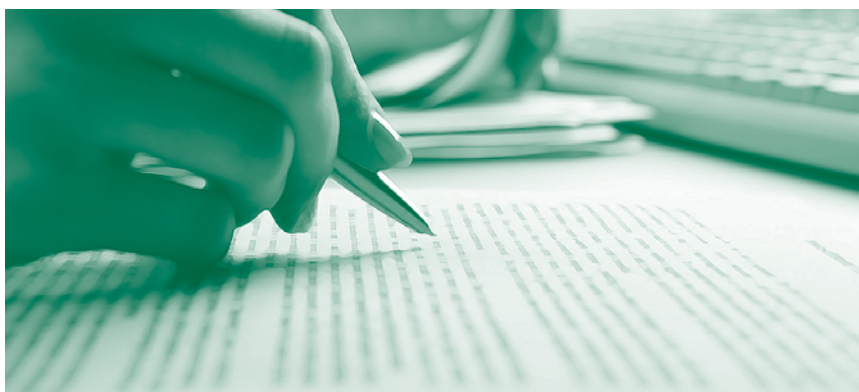

Estimação não-paramétrica do risco de cauda

Caio Ibsen Rodrigues Almeida, José Valentim Machado Vicente e
Osmani Teixeira de Carvalho Guillen

Julho, 2013

Trabalhos para Discussão



311

ISSN 1519-1028
CGC 00.038.166/0001-05

Trabalhos para Discussão	Brasília	n° 311	julho	2013	p. 1-25
--------------------------	----------	--------	-------	------	---------

Trabalhos para Discussão

Editado pelo Departamento de Estudos e Pesquisas (Depep) – *E-mail*: workingpaper@bcb.gov.br

Editor: Benjamin Miranda Tabak – *E-mail*: benjamin.tabak@bcb.gov.br

Assistente Editorial: Jane Sofia Moita – *E-mail*: jane.sofia@bcb.gov.br

Chefe do Depep: Eduardo José Araújo Lima – *E-mail*: eduardo.lima@bcb.gov.br

Todos os Trabalhos para Discussão do Banco Central do Brasil são avaliados em processo de *double blind referee*.

Reprodução permitida somente se a fonte for citada como: Trabalhos para Discussão nº 311.

Autorizado por Carlos Hamilton Vasconcelos Araújo, Diretor de Política Econômica.

Controle Geral de Publicações

Banco Central do Brasil

Comun/Dipiv/Coivi

SBS – Quadra 3 – Bloco B – Edifício-Sede – 14º andar

Caixa Postal 8.670

70074-900 Brasília – DF

Telefones: (61) 3414-3710 e 3414-3565

Fax: (61) 3414-1898

E-mail: editor@bcb.gov.br

As opiniões expressas neste trabalho são exclusivamente do(s) autor(es) e não refletem, necessariamente, a visão do Banco Central do Brasil.

Ainda que este artigo represente trabalho preliminar, citação da fonte é requerida mesmo quando reproduzido parcialmente.

The views expressed in this work are those of the authors and do not necessarily reflect those of the Banco Central or its members.

Although these Working Papers often represent preliminary work, citation of source is required when used or reproduced.

Divisão de Atendimento ao Cidadão

Banco Central do Brasil

Deati/Diate

SBS – Quadra 3 – Bloco B – Edifício-Sede – 2º subsolo

70074-900 Brasília – DF

DDG: 0800 9792345

Fax: (61) 3414-2553

Internet: <<http://www.bcb.gov.br/?FALECONOSCO>>

Estimação não-paramétrica do risco de cauda

Caio Ibsen Rodrigues Almeida*

José Valentim Machado Vicente†

Osmani Teixeira de Carvalho Guillen‡

Este Trabalho para Discussão não deve ser citado como representando as opiniões do Banco Central do Brasil. As opiniões expressas neste trabalho são exclusivamente do(s) autor(es) e não refletem, necessariamente, a visão do Banco Central do Brasil.

Resumo

Previsão de crises financeiras tem enorme importância prática. Neste artigo nós propomos uma medida de risco de perdas extremas usando dados em *cross-section* de preços de ativos. Esta medida apresenta como vantagem prática o fato de prescindir de dados de opções para sua implementação. Usando dados da economia americana, os nossos resultados mostram que a nossa medida de risco tem poder preditivo significativo do retorno de mercado um mês a frente e do consumo um trimestre a frente.

Palavras-chaves: Risco de cauda, fator estocástico de desconto, valor em risco.

Código JEL: G12, G13, G17.

*Email: calmeida@fgv.br, EPGE/FGV.

†Email: jose.valentim@bcb.gov.br, Banco Central do Brasil.

‡Email: osmani.guillen@bcb.gov.br, Banco Central do Brasil.

1 Introdução

Rietz (1988) e Barro (2006) hipotetizam que o retorno esperado das ações está intimamente conectado com o risco de desastres. Isso forneceria uma explicação para o *equity premium puzzle* e diversas outras questões abertas em finanças (veja Gabaix, 2012). Portanto, para testar a aderência desses modelos à realidade, faz-se necessário mensurar esse risco. Por outro lado, reguladores têm demonstrado preocupação quanto a capacidade dos modelos tradicionais de risco anteciparem crises financeiras.¹ Argumentam eles que é necessário uma forma efetiva de avaliar o risco de cauda.² Recentemente, alguns trabalhos propuseram técnicas para resolução desses problemas. Neste artigo nós oferecemos uma metodologia alternativa para cálculo do risco de cauda a partir da distribuição neutra ao risco de um conjunto de fatores de risco base.³

O risco de cauda está associado a eventos raros mas que podem provocar perdas extremas. Embora o conceito de risco de cauda seja simples, medi-lo é uma tarefa desafiadora. Um modo tradicional de avaliar o risco de cauda consiste no uso de modelos de teste de estresse. No entanto, como bem ressalta Kelly (2012), eventos extremos são, por natureza, raros. Ou seja, qualquer inferência sobre a probabilidade de quebras a partir de séries históricas esbarraria na escassez de informação disponível. Ademais, além de raros, eventos extremos do passado podem não mais se repetir no futuro devido a uma ruptura no ambiente econômico ou ao desenvolvimento de novas medidas preventivas. Por outro lado, Borio et. al (2012) argumentam que os testes de estresse não são adequados como dispositivos de alerta, ou seja, como ferramentas para a identificação de vulnerabilidades em momentos

¹A forma mais comum de avaliação de risco por reguladores consiste no uso da métrica *Value-at-Risk* (VaR). O VaR representa o quantil (em geral de 5%) da distribuição futura de ganhos ou perdas de uma carteira. No entanto, o uso do VaR como ferramenta de gerenciamento de eventos catastróficos é bastante controverso (veja, por exemplo, Jarrow, 2012).

²Essa preocupação aumentou nos últimos anos em razão dos efeitos da crise *subprime*. Andy Haldane, Diretor Executivo de Estabilidade Financeira do Banco da Inglaterra, declarou recentemente que “the fatter the tails of the risk distribution, the more misleading VaR-based risk measures will be” (veja <http://www.businessweek.com/news/2012-06-08/boe-s-haldane-sees-risk-regulators-may-misjudge-capital-needs>). Nessa mesma linha, Perotti e outros (2011) mostram que o capital regulatório exigido por Basileia não é suficiente para cobertura do risco de cauda.

³Barro (2006) caracteriza desastres como eventos de declínio no PIB acima de 15%. No caso americano, Barro lista dois episódios no século XX de contração superior a 15%: A Grande Depressão de 1929-1933 e a depressão pós Segunda Guerra Mundial (1944-1947). O risco de cauda engloba, além desses episódios, outros que produziram efeitos reais menos severos, como por exemplo, quebras no mercado (*market crashes*).

aparentemente tranquilos.

Em vista dessas dificuldades, um ramo recente da literatura tem atacado essa questão via uma abordagem menos baseada em dados passados. Bollerslev e Todorov (2011) estimam um índice de medo dos investidores usando uma base de dados intradiária de preços futuros e de opções sobre S&P 500. Kelly (2012) assume que a cauda inferior da distribuição dos retornos das ações obedece a lei de potência. Essa distribuição depende de dois parâmetros. Um deles (variante no tempo) representa o risco de cauda da economia enquanto o outro captura a resposta dos ativos a fonte comum de risco de cauda. A partir de dados em *cross-section*⁴, Kelly estima o risco de cauda da economia via um *pooling* dos retornos diários de todas as ações em um mês. Ambos os trabalhos mostram que o risco de cauda tem importante papel na explicação do prêmio de risco das ações. Allen e outros (2011) definem um indicador de catástrofe financeira como a média dos percentis calculados de três modos diferentes dos retornos em *cross-section* de ações do setor financeiro. Eles mostram que o indicador catastrófico prevê recessões macroeconômicas com seis meses de antecedência. Outra forma bastante interessante de estimar medidas de eventos extremos consiste em observar diretamente preços de opções, especialmente de *puts*. Por exemplo, Siriwardane (2011) propõe um método para detectar diariamente o risco de cauda agregado da economia baseado em uma série de portfólios de opções sobre diversas ações.

Neste trabalho, nós propomos uma forma diferente de calcular o risco de cauda. Primeiramente, nós estimamos as distribuições neutras ao risco (DNR) de um conjunto base de ativos (fixados como os seis portfólios de Fama-French no exercício empírico descrito na Seção 3). DNR são valiosas fontes de informação uma vez que além das chances de ocorrência dos estados da natureza refletem também o medo que os investidores têm desses estados. Baseado nesse fato, Ait-Sahalia e Lo (2000) tiveram uma ideia interessante para avaliar o risco econômico. Ao invés de calcular os percentis da distribuição estatística dos preços, que refletem as probabilidades reais, eles trabalham com a DNR. Os percentis da DNR geram o que Ait-Sahalia e Lo denominam de *Economic VaR* (E-VaR). Segundo eles, o E-VaR é muito mais informativo uma vez que as DNR são determinadas por condições de equilíbrio embutindo aspectos tais como preferências dos investidores, restrições orçamentárias e *market-clearing*. O E-VaR contempla não só o valor monetário das perdas mas também o impacto delas de acordo

⁴Mais precisamente, deveríamos dizer que os dados estão dispostos em painel. No entanto, como esse painel é curto (um mês), podemos, sem cometer um erro absurdo, usar a denominação *cross-section* que reflete melhor a ideia de não utilização de informações muito antigas.

com as condições econômicas.

Em seguida, nós damos um passo adiante em relação à Ait-Sahalia e Lo (2000) e exploramos em mais detalhes o lado inferior esquerdo das DNR. Para tal, calculamos a soma de quatro medidas de cauda de cada uma das DNR dos ativos base. Essas medidas são: (i) percentil 1%; (ii) diferença entre o percentil 1% e o percentil 10%; (iii) preço de *put out-of-the-money*; e (iv) preço de um portfólio assimetria, isto é, a diferença entre os preços de *put out-of-the money* e de *call in-the-money*.⁵ O risco de cauda é definido como a primeira componente principal dessas quatro séries.

O método descrito acima nos traz outra demanda: Como estimar as DNR? O problema surge do fato de que DNR não são observadas. Uma série temporal de preços evolui de acordo com as probabilidades físicas. Breeden e Litzenberger (1978), Bates (1991), Rubinstein (1994), Longstaff (1995), Ait-Sahalia e Lo (1998) dentre outros propõem soluções para essa questão. Todos esses trabalhos usam preços de opções para extrair a DNR do ativo objeto. Isso impõe restrições a aplicabilidade desses métodos. Por exemplo, é impossível extrair DNR de ativos quando não há um mercado de opções líquido. Além do mais, quando o objetivo é avaliação de risco, correlações assumem um papel fundamental como mostrado no artigo seminal de Markowitz (1952). Entretanto, opções multifator (opções arco-íris) são extremamente incomuns.

Para contornar os problemas relacionados à disponibilidade de preços de opções descritos no parágrafo anterior, nós calculamos as DNR de acordo com o modelo proposto por Almeida e Garcia (2011). Neste modelo, dada uma série temporal de retornos de um conjunto de ativos, Almeida e Garcia (2011) encontram uma família de fatores estocásticos de desconto através da minimização de funções convexas no espaço de fatores estocásticos de desconto admissíveis e não-negativos. Estas métricas convexas medem a distância entre um fator estocástico de desconto admissível e o fator estocástico de desconto de uma economia neutra ao risco. Assumindo-se uma taxa de curto prazo constante e probabilidades reais (físicas) da economia homogêneas⁶, exatamente como em uma simulação histórica de VaR, somos capazes de obter uma correspondência direta entre fatores estocásticos de desconto e DNR. Cada função convexa escolhida como métrica gera uma DNR que dá um determinado tipo de ênfase aos quatro primeiros momentos dos retornos dos ativos escolhidos: média, variância, assimetria e curtose.

O uso da técnica de Almeida e Garcia (2011) nos leva mais um passo

⁵*Puts out-of-the-money* oferecem uma proteção natural contra crises. Já *calls in-the-money* têm seu preço reduzido em momentos de nervosismo.

⁶Isto é, se existem T estados da natureza, então a probabilidade de cada estado é $\frac{1}{T}$.

adiante em relação aos trabalhos anteriores que avaliam risco a partir de DNR extraídas de preços de opções: É possível estimar DNR de qualquer ativo ou fator de risco para os quais exista um mercado à vista disponível, mesmo que derivativos sobre esses ativos não sejam negociados. Mais ainda, podemos estender nossa análise até horizontes longínquos, como por exemplo, a crise de 1929. Observe que até mesmo o provocativo Teorema da Recuperação de Ross (2012) não contorna essa dificuldade. Ross mostra que é possível determinar as probabilidades físicas a partir das DNR, permitindo, dentre outras aplicações, calcular a probabilidade que o mercado atribui a uma catástrofe. No entanto, mais uma vez, preços de opções são necessários.

Os nossos resultados mostram que a medida de risco de cauda aqui proposta tem forte capacidade preditiva do retorno de mercado e do consumo futuros. Um aumento de uma unidade no risco de cauda prevê uma queda de 7,6% no mercado de ações (medido pelo S&P 500) um mês à frente e de 0,8% no consumo um trimestre à frente (ambos anualizados). Essas variações são significantes com estatísticas t de 7,15 e 2,96, respectivamente. Os nossos achados são também robustos a uma série de variações na forma de estimação do risco de cauda. Por exemplo, os resultados permanecem qualitativamente inalterados quando mudamos a função convexa da rotina de minimização do modelo de Almeida e Garcia (2011).

O restante deste artigo está organizado como se segue. A Seção 2 apresenta uma breve descrição da técnica de estimação de DNR baseada no modelo de Almeida e Garcia (2011). Nessa mesma seção discutimos também a nossa proposta de mensuração do risco de cauda a partir das DNR calculadas. Na Seção 3 nós fazemos uma análise dos resultados obtidos e discutimos sobre o relacionamento entre o risco de cauda e crises econômicas. A Seção 4 contém uma série de testes de robustez em relação a forma de estimação da métrica de risco de cauda. Por fim, a Seção 5 apresenta uma conclusão sobre este trabalho.

2 Metodologia

O primeiro passo da nossa metodologia de estimação do risco de cauda consiste na obtenção das DNR. Para tal nós usamos o modelo de Almeida e Garcia (2011) que apresenta como vantagem o fato de não utilizar dados de opções. A seguir apresentaremos uma descrição sucinta desse modelo.

Seja R o vetor de retornos de ativos base cuja realização é dada pela série temporal $\{R_i\}_{i=1,\dots,T}$ em um espaço de dimensão K . Em nossa aplicação empírica (Seção 3) os ativos base serão os seis portfólios de Fama-French. Esses portfólios são formados pela interseção de dois portfólios construídos

de acordo com o tamanho das empresas (valor de mercado) e três portfolios construídos pela razão entre o valor contábil e o valor de mercado das empresas. A base de dados usada por Fama-French é fornecida pelo CRSP (*The Center for Research in Security Prices*) e contém preços de ações de empresas que satisfazem determinados critérios de filtragem.⁷

Um fator estocástico de desconto m que apreça esses ativos deve satisfazer a Equação de Euler (admissibilidade do fator estocástico de desconto):

$$E(mR) = 1_K,$$

onde 1_K representa um vetor K -dimensional formado por uns. Na forma amostral, a Equação de Euler é dada por:

$$\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T m_i \left(R_i - \frac{1}{a} 1_K \right) = 0_K,$$

onde 0_K é um vetor K -dimensional de zeros e $a = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T m_i$. Para garantir ausência de arbitragem devemos impor $m_i > 0$.

Generalizando Hansen e Jagannathan (1991), Almeida e Garcia (2011) procuram por fatores estocásticos de mínima discrepância que solucionam o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \hat{m}_{MD} = & \arg \min_{\{m_1, \dots, m_T\}} && \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \phi^\gamma(m_i) \\ & \text{s.a.} && \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T m_i \left(R_i - \frac{1}{a} 1_K \right) = 0_K, \\ & && \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T m_i = a, \\ & && m_i > 0 \quad \forall i \end{aligned}$$

onde ϕ^γ é um função de discrepância convexa e homogênea dada por:

$$\phi^\gamma(m) = \frac{m^{\gamma+1} - a^{\gamma+1}}{\gamma(\gamma+1)}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Almeida e Garcia (2011) mostram que a solução desse problema é

$$\hat{m}_{MD}^i = a \frac{\left(a^\gamma + \gamma \lambda'_\gamma \left(R_i - \frac{1}{a} 1_K \right) \right)^{\frac{1}{\gamma}}}{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \left(\left(a^\gamma + \gamma \lambda'_\gamma \left(R_i - \frac{1}{a} 1_K \right) \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right)}, \quad (1)$$

onde λ^γ é solução do seguinte problema de otimização:

⁷Para mais detalhes sobre esses portfolios, consulte o *website* do professor Kenneth French <http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/index.html>.

$$\lambda_\gamma = \underset{\lambda}{\arg \text{máx}} \quad \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \left(\frac{a^{\gamma+1}}{\gamma+1} - \frac{1}{\gamma+1} (a^\gamma + \gamma \lambda' (R_i - \frac{1}{a} 1_K)) \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}$$

s.a. $1 + \gamma \lambda' (R_i - \frac{1}{a} 1_K) > 0 \quad \forall i$

Observe que o fator estocástico depende do parâmetro γ . Nós arbitrariamente fixamos $\gamma = -3$. No entanto, na Seção 4 nós discutimos testes de robustez que levam em conta, dentre outras variações no modo de cálculo do risco de cauda, mudanças nesse parâmetro.

Na simulação histórica tradicionalmente usada para cálculo do VaR, a probabilidade de cada um dos resultados da amostra dos retornos é $1/T$. Trabalhando com essa hipótese as DNR são dadas simplesmente por $m_i(1+r)/T$ onde r é taxa livre de risco.

Extraídas as DNR dos ativos base, nós calculamos quatro medidas de cauda dessa distribuição. Essas medidas serão denominadas medidas primitivas de risco de cauda por razões que ficarão claras mais adiante. A primeira medida é simplesmente a soma dos quantis 1% das DNRs de cada ativo base, isto é, a soma dos VaR 99%. A segunda medida é a soma das diferenças entre os quantis 1% e 10%, isto é a soma das diferenças entre os VaR 99% e VaR 90%. A ideia dessa medida primitiva é excluir perdas em condições normais (VaR 90%) da cauda da distribuição (VaR 99%). De posse das DNR podemos calcular preços de ativos, em particular podemos calcular preços de opções. Preços de portfólios de opções são um bom indicativo de catástrofes. A maneira mais simples de se proteger contra uma crise consiste na compra de *puts out-of-the money*. Uma *put out-of-the money* só remunera o comprador caso ocorra uma forte depreciação do ativo objeto. A terceira métrica primitiva é a soma dos preços de *puts out-of-the money* sobre os ativos base. Consideramos *puts out-of-the money* aquelas com *strikes* iguais ao quantil 10% da DNR. Uma estratégia mais interessante que permite explorar a possibilidade de quedas extremas consiste na compra de um portfólio assimetria. Um portfólio assimetria é formado pela compra de uma *put out-of-the money* e venda de uma *call out-of-the money*. Uma *call* foi definida como *out-of-the money* quando o seu *strike* for igual ao quantil 90% da DNR. A quarta medida primitiva é a soma dos preços de portfólios assimetria montados sobre cada um dos ativos base. Observe que, conhecida a DNR, o preços das *calls* e *puts* são facilmente calculados. Finalmente, nós definimos o risco de cauda como sendo a primeira componente principal das quatro medidas primitivas.

3 Resultados

Conforme descrito na Seção 2, o Risco de Cauda aqui proposto (escrito, de agora em diante, com letras maiúsculas) é a primeira componente principal de quatro métricas primitivas de cauda. Devido a alta correlação entre essas quatro métricas a primeira componente explicou 67,25% da variação dos dados originais. A Tabela 1 contém estatísticas descritivas sobre o Risco de Cauda. O valor máximo do Risco de Cauda é 12,83 (setembro de 1929) e o mínimo é -2,58 (dezembro de 1969). A série é fortemente assimétrica à direita e leptocúrtica. É também estacionária (estatística de Dickey-Fuller igual a -8,71). O Risco de Cauda pode ser ajustado por um processo AR(2) com coeficientes de ordens 1 e 2 significativos (nível de 5%) e iguais a 0,23 e 0,16, respectivamente.

A Figura 1 apresenta a evolução temporal do Risco de Cauda entre julho de 1926 e setembro de 2012. O gráfico mostra uma alta volatilidade do Risco de Cauda com vários picos. Esse comportamento de “eletrocardiograma” também é observado em outras medidas do risco de cauda como por exemplo o expoente da lei de potência estimado por Kelly (2012). A linha vermelha é a média móvel de seis meses do Risco de Cauda. Essa suavização permite melhor visualizar a relação entre o Risco de Cauda e eventos de estresse. Interessante notar como o Risco de Cauda sofre forte elevação em momentos de crise, muitas vezes antecipando quebras no mercado. Por exemplo, o pico máximo do Risco de Cauda aconteceu em setembro de 1929, exatamente um mês antes do *crash* da Bolsa de Nova York. Em outubro de 1929, o índice Dow Jones teve tombo de mais de 20% sendo que em apenas dois dias (28 e 29 de outubro) a queda superou 12%. Esse movimento foi apenas o início da maior crise econômica da história que se estendeu por 10 anos.

A antecipação de fortes movimentos do mercado pela nossa medida de risco de cauda também é observado em outros momentos. Em abril de 1962, observa-se um pico no Risco de Cauda. Em maio e junho desse mesmo ano o S&P 500 recuou 9% e 7%, respectivamente. Esse *bear market* foi apelidado de Kennedy *Slide* em razão de alguns analistas identificarem as causas dessa queda como dificuldades internas e externas do governo do presidente John Kennedy. Em setembro de 1987 ocorreu outra elevação abrupta no Risco de Cauda. Em 19 de outubro de 1987, dia que ficou conhecido como segunda-feira negra, o índice Dow Jones apresentou a maior queda percentual da história, recuando 22,6%. Em setembro de 1997 e julho de 1998 temos dois picos do Risco de Cauda que podem ser associados a crise da Ásia (em 27 de outubro de 1997, pior momento da crise, o índice Dow Jones recuou 7,2%) e a crise da Rússia (*default* do governo russo em 17 de agosto de 1998, cujo

reflexo no mercado americano foi uma queda de 11,5% no Dow Jones em 3 dias no fim de agosto).⁸

Por outro lado, nas crises do petróleo de 1973 e *subprime* de 2008, o Risco de Cauda reagiu, na melhor das hipóteses, contemporaneamente. Os ápices dessas duas crises podem ser marcados em outubro de 1973 (decisão dos países exportadores de petróleo de elevar em 70% o preço do barril) e em setembro de 2008 (quebra do banco Lehman Brothers). Já os picos de Risco de Cauda próximos a essas datas ocorreram em outubro de 1973 e novembro de 2008. Vale notar que em relação à crise *subprime* outras medidas de risco de cauda proposta na literatura sequer apresentaram variações significativas durante o ano de 2008. Kelly (2012) argumenta que a crise *subprime* foi marcada por uma volatilidade extrema, mas que essa volatilidade era previsível em horizontes de curto prazo. Depois de ajustar por essa componente previsível, os retornos não seriam extremos quando comparados com a distribuição histórica. Portanto, não haveria efeito no risco de cauda.

Finalmente, alguns picos do Risco de Cauda não possuem associação aparente com nenhuma crise. Nesse caso, se incluem os movimentos de agosto de 1946, maio de 1950 e agosto de 1955. No entanto, embora nesses períodos não haja registro de catástrofes, é possível observar desvalorizações acentuadas da Bolsa de Nova York em meses ao redor dessas datas. Por exemplo, em agosto e setembro de 1946 o Dow Jones sofreu duas quedas consecutivas de 6,5% e 3,5%, respectivamente.⁹

Para melhor precisar a capacidade do Risco de Cauda de atuar como um indicador antecedente de crises, nós rodamos duas regressões. A primeira delas relaciona o retorno de mercado com o Risco de Cauda:

$$M_t = \beta TR_{t-1} + \theta M_{t-1} + K + \epsilon_t, \quad (2)$$

onde M_t é o retorno de mercado em t e TR_{t-1} é o Risco de Cauda em $t - 1$. O retorno de mercado foi medido pelo retorno do S&P 500 calculado por Shiller (2005). Esses dados estão disponíveis (e atualizados) na *home page* de Robert Shiller, <http://www.econ.yale.edu/~shiller/data.htm>. O termo M_{t-1} controla autocorrelação de primeira ordem no retorno de mercado. A regressão 2 foi rodada com dados mensais entre julho de 1926 e setembro de 2012 (1033 observações).

A segunda regressão tem por objetivo determinar a associação entre o Risco de Cauda e o consumo futuro:

⁸Para uma análise mais detalhada de crises americanas veja, por exemplo, Sobel (1999).

⁹Note entretanto que o período pós Segunda Guerra Mundial é identificado por Barro (2006) como um dos dois episódios de desastres na economia americana no século XX.

$$C_t = \beta TR_{t-1} + \theta_1 C_{t-1} + \theta_2 C_{t-2} + \theta_3 C_{t-3} + \theta_4 C_{t-4} + K + \epsilon_t, \quad (3)$$

onde C_t é o consumo no trimestre t . Mais uma vez, os termos defasados no lado direito têm por objetivo controlar efeitos autoregressivos na variável dependente. Os dados de consumo são representados pela série despesa real com bens de consumo pessoais, ajustada sazonalmente, que mede a quantidade real de bens e serviços adquiridos por residentes dos EUA.¹⁰ Esses dados se estendem do segundo trimestre de 1948 até o terceiro trimestre de 2012 (258 observações).

Grosso modo podemos dizer que a Equação 2 captura o aspecto financeiro das crises enquanto a Equação 3 engloba o lado econômico. As Tabelas 2 e 3 apresentam os resultados das regressões 2 e 3, respectivamente. Para obter a estatística t nós usamos o estimador de Newey e West (1987), que mantém a consistência mesmo na presença de autocorrelação e heterocedasticidade. O Risco de Cauda é significativo (no nível de 95%) em ambas as regressões. Um aumento de uma unidade do Risco de Cauda provoca em média quedas de 7,6% a.a. ($0,0063 \times 12$) no retorno de mercado um mês a frente e de 0,8% a.a. ($0,0020 \times 4$) no consumo um trimestre a frente.

Um exercício interessante consiste em comparar a nossa medida de risco de cauda com outras baseadas em opções. Opções são instrumentos financeiros cujo o preço fornece valiosa informação sobre a distribuição de probabilidade futura dos preços de ativos. Baseado nessa ideia, Siriwardane (2011) propõe uma medida para detectar o risco de cauda usando portfolios de opções sobre ações. Dentre outras estratégias, Siriwardane (2011) considera um portfolios assimetria delta-vega neutros. Um portfolio assimetria é formado pela compra de *put out-of-the-money* e pela venda de *call out-of-the-money*. A condição delta e vega neutros tem por objetivo eliminar da medida de risco de cauda outros riscos, tais como o risco de volatilidade. Dados de opções só estão disponíveis a partir de 1996. Siriwardane (2011) empregou dados diários de opções sobre 74 ações todas com prazo de um mês. Em seguida, o risco de cauda agregado foi definido como a média dos preços dos portfolios assimetrias delta-vega neutros sobre essas 74 ações.¹¹ Como a nossa medida de risco de cauda tem frequência mensal, nós aplicamos na medida de risco de cauda baseada em portfolios assimetrias um segundo op-

¹⁰Mais especificamente, usamos a série código PCECC96 - *Real Personal Consumption Expenditures* disponível em <http://research.stlouisfed.org/fred2/series/pcecc96>.

¹¹Siriwardane (2011) considera diversas outras medidas agregadas de risco de cauda como, por exemplo, preços de outros portfolios de opções e/ou calculando a primeira componente principal ao invés da média.

erador média em cada mês.¹² A Figura 2 apresenta tanto a nossa medida de risco de cauda como a baseada nos portfolios assimetria de opções entre janeiro de 1996 e outubro de 2010. Visualmente essas duas séries parecem caminhar juntas o que é confirmado pela correlação de 50,31% entre elas.

Por fim, nós também investigamos o poder preditivo fora da amostra do Risco de Cauda usando um procedimento idêntico ao proposto por Kelly (2012). O objetivo é avaliar se o Risco de Cauda é capaz de fornecer uma previsão para o retorno futuro do mercado. Seja t_0 o mês inicial da amostra. Para cada $t_s \geq t_0 + 120$, nós estimamos a seguinte regressão univariada:

$$M_t = \beta TR_{t-1} + K + \epsilon_t, \quad (4)$$

com dados entre t_0 e t_s . O deslocamento de 120 meses tem por objetivo permitir uma base de dados inicial suficientemente grande. Os coeficientes dessa regressão são usados para fazer a previsão do retorno de mercado em $t_s + 1$. A base de dados é então aumentada em um mês e uma nova previsão é feita. O procedimento é repetido até o fim da base de dados.

De posse da sequência de previsões assim geradas, podemos definir o R^2 fora da amostra como:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_t (M_{t+1} - \hat{M}_{t+1|t})^2}{\sum_t (M_{t+1} - \bar{M}_t)^2},$$

onde $\hat{M}_{t+1|t}$ é a previsão para $t + 1$ feita em t e \bar{M}_t é a média do retornos de mercado entre t_0 e t . Um R^2 negativo significa que a previsão produzida pelo Risco de Cauda é pior do que tomar simplesmente a média histórica. Considerando a amostra inteira ($t_0 =$ julho de 1926 até setembro de 2012), o R^2 fora da amostra é 5,1%. Considerando apenas o período estudado por Kelly (2012) ($t_0 =$ janeiro de 1963 até dezembro de 2010) o R^2 aumenta para 5,6%. O R^2 fora da amostra do risco de cauda proposto por Kelly (2012) é 0,7% para previsão um mês a frente. Em outras palavras o Risco de de Cauda aqui proposto demonstrou capacidade preditiva um mês a frente superior ao expoente da lei de potência estudado por Kelly (2012).

4 Testes de Robustez

A metodologia de estimação do risco de cauda por nós proposta contém uma série de especificações que poderiam ser consideradas arbitrárias gerando

¹²Nós agradecemos a Emil Siriwardane que gentilmente cedeu os dados de seu trabalho.

questionamentos sobre a validade dos resultados apresentados. Essas especificações englobam os parâmetros do modelo de Almeida e Garcia (2011), os ativos base, as métricas primitivas de risco de cauda (das quais extraímos a primeira componente principal) e as variáveis de controle das regressões 2 e 3. Nessa seção nós discutimos uma série de variações da nossa metodologia. Do ponto de vista qualitativo, os achados discutidos na seção anterior são robustos a todas essas variações.

O primeiro questionamento diz respeito ao parâmetro γ do modelo de Almeida e Garcia (2011). Esse parâmetro foi fixado no valor de -3. Nós também calculamos o Risco de Cauda para os seguintes valores de γ : -5, -2, -1, -0,5 e 0. As correlações entre o Risco de Cauda com esses valores de γ e o Risco de Cauda com γ igual a -3 foram todas superiores a 85%, indicando que os nossos resultados não são sensíveis ao parâmetro chave do modelo de Almeida e Garcia (2011).

Todas as métricas primitivas de risco de cauda dependem da escolha de um quantil. Nas métricas 1 e 2, temos de escolher o quantil do VaR. Nas métricas 3 e 4, temos de escolher o quantil que define os *moneyness* das opções. Nós testamos pequenas variações em todos esses quantis. Na métrica primitiva 1, mudamos o VaR de 99% para 95%. Na métrica primitiva 2, mudamos o VaR de 90% para 85% e 95%. Nas métricas 3 e 4, definimos a *put out-of-the-money* como sendo aquela com *strike* igual ao quantil 20% da DNR e a *call out-of-the-money* aquela com *strike* igual ao quantil 80% da DNR. As medidas de risco de cauda (primeira componente principal das métricas primitivas) assim geradas possuíam, mais uma vez, alta correlação com o Risco de Cauda estudado na seção anterior. Adicionalmente, nós também consideramos uma quinta métrica primitiva definida pelo preço de um portfolio assimetria delta-vega neutro conforme sugerido por Siriwardane (2011). A introdução dessa quinta métrica teve pouco impacto no Risco de Cauda.

Em relação aos ativos base, nós trabalhamos com as seguintes variações: diretamente com os fatores de Fama-French (Prêmio de Risco de Mercado, SMB e HML) e com os 25 portfolios de Fama-French. Nesse último caso, o risco de cauda foi calculado em base trimestral, haja vista que com 25 ativos precisamos de mais de 25 observações para estimar a DNR usando o modelo de Almeida e Garcia (2011). Baseado na ideia de agrupamento de dados em *cross-section* utilizada, por exemplo, por Allen e outros (2012) e Kelly (2012), nós empilhamos todos os retornos dos seis portfolios de Fama-French em cada mês, criando um único ativo fictício. Em seguida, nós extraímos a DNR desse ativo fictício pelo procedimento de Almeida e Garcia (2011) e

calculamos outra variante do Risco de Cauda.¹³ Todas essas variações dos ativos base não produziram modificações significativas nos resultados das regressões 2 e 3.

Por fim, nós estudamos alterações nas especificações das regressões 2 e 3. Primeiramente, ao invés da série de retornos do S&P 500 calculada por Shiller (2005), consideramos como retorno de mercado o índice Dow Jones e o fator Prêmio de Risco de Mercado de Fama-French. Como alternativa ao consumo como variável de aferição do nível de atividade econômica, tomamos o Produto Interno Bruto real com ajuste sazonal.¹⁴ Em relação aos controles, introduzimos em ambas as regressões uma medida de volatilidade do retorno de mercado. Essa volatilidade foi calculada de duas formas diferentes: (i) usando um modelo GARCH (1,1) com dados mensais do retorno de mercado e (ii) pela volatilidade realizada dos retornos diários do mercado em cada mês. Os resultados mantiveram-se inalterados. Ou seja, o Risco de Cauda foi significativo no nível de 5% e com sinal negativo.

5 Conclusão

Neste trabalho nós introduzimos uma forma inovadora de mensuração do risco de cauda, isto é, o risco de crises econômicas. A abordagem consistiu em, primeiramente, extrair as probabilidades neutras ao risco de um conjunto de ativos base, eleitos, no exercício empírico, como os seis portfólios de Fama-French. Para tal usamos o modelo de Almeida e Garcia (2011) que apresenta como vantagem o fato de poder ser implementado sem demandar preços de opções. De posse dos preços de estados, foram calculadas quatro métricas de risco de cauda construídas com base nos quantis e preços de portfólios sintéticos de opções. A medida de risco de cauda da economia foi então tomada como sendo a primeira componente principal dessas quatro medidas.

Usando dados da economia americana, os nossos resultados mostram que a medida de risco de cauda aqui proposta têm forte capacidade preditiva do retorno de mercado um mês a frente e do consumo das famílias um trimestre a frente. Esses resultados são robustos a uma série de variações no procedimento de cálculo do risco de cauda. Do ponto de vista acadêmico, os nossos achados fornecem uma ferramenta que pode ser usada para testar modelos

¹³Vale notar que esse procedimento de empilhamento dos dados se constitui em um mero artifício empírico, carecendo de significado econômico dentro do arcabouço teórico de Almeida e Garcia (2011).

¹⁴Série *Real Gross Domestic Product*, código GDPC1, disponível em <http://research.stlouisfed.org/fred2/series/GDPC1>, que representa o valor real dos bens e serviços produzidos pelo trabalho e propriedade nos EUA.

recentes que levam em conta riscos de desastres com o objetivo de explicar certos *puzzles* em finanças. Do ponto de vista prático, oferecemos uma ferramenta útil para gestores e reguladores controlarem a exposição de carteiras e instituições a eventos extremos.

6 Bibliografia

Ait-Sahalia, Y. e A. W. Lo (1998). Nonparametric estimation of state-price densities implicit in financial asset prices. *Journal of Finance*, **53**, 499-547

Ait-Sahalia, Y. e A. W. Lo (2000). Nonparametric risk management and implied risk aversion. *Journal of Econometrics*, **94**, 9-51.

Allen, L., T. Bali e Y. Tang (2012). Does systemic risk in the financial sector predict future economic downturns?. *The Review of Financial Studies*, **25**, 10, 3000-3036.

Almeida, C. e R. Garcia (2011). Robust economic implications of nonlinear pricing kernels. Working Paper, EPGE-FGV e EDHEC Business School.

Bates, D. S. (1991). The crash of '87: Was it expected? The evidence from options markets. *Journal of Finance*, **46**, 1009-1044.

Breedon, D. e R. Litzenberger (1978). Prices of state-contingent claims implicit in option prices. *Journal of Business*, **51**, 621-651.

Barro, R. (2006). Rare disasters and asset markets in the twentieth century. *The Quarterly Journal of Economics*, **121** (3), 823-866.

Bollerslev, T. e V. Todorov (2011). Tails, Fears and Risk Premia, *Journal of Finance*, **66** (6), 2165-221.

Borio, C., M. Drehmann e K. Tsatsaronis (2012). Stress-testing macro stress testing: does it live up to expectations? BIS Working Paper No. 369.

Gabaix, X. (2012). Variable rare disasters: An exactly solved framework for ten puzzles in macro-finance. *Quarterly Journal of Economics*, **127** (2), 645-700.

Hansen, L. P. e R. Jagannathan (1991). Implications of security market data for models of dynamic economies. *Journal of Political Economy*, **99** (2) 225-262.

Jarrow, R. (2012). Capital adequacy rules, catastrophic firm failure, and systemic risk. Johnson School Research Paper Series No. 5.

- Kelly, B. (2012). Tail Risk and Asset Prices. Working Paper. Disponível em <http://faculty.chicagobooth.edu/bryan.kelly/research/index.html>.
- Longstaff, F. (1995). Option pricing and the martingale restriction. *Review of Financial Studies*, **8**, 1091-1124.
- Rubinstein, M. (1994). Implied binomial trees. *Journal of Finance*, **69** (3) 771-818.
- Perotti, E., L. Ratnovski e R. Vlahu (2011). Capital regulation and tail risk. IMF Working Paper.
- Markowitz, H. M. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*, **7**, 77-91.
- Newey, W. K. e K. D. West (1987). A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix. *Econometrica*, **55**, 703-708.
- Rietz, T. (1988). The equity risk premium: A solution. *Journal of Monetary Economics*, **22** (1), 117-131.
- Ross, S. A. (2012). The recovery theorem. No prelo, *Journal of Finance*.
- Siriwardane, E. (2011). TRIO: Tail Risk Implied by Options. Working Paper, NYU Stern School of Business.
- Sobel, R. (1999). Panic on Wall Street: A history of America's financial disasters. Beard Books.

Estatística	Valor
Média	0,0003
Mediana	-0,4931
Máximo	12,8328
Mínimo	-2,5810
Desvio Padrão	1,6366
Assimetria	3,3328
Curtose	19,0768
Dickey-Fuller	-8,71
KPSS	1,35
AR(1)	0,23 (7,43)
AR(2)	0,16 (5,07)

Tabela 1: Estatísticas descritivas - Risco de Cauda.

Esta tabela apresenta estatísticas descritivas do Risco de Cauda. Os valores críticos dos testes de Dickey-Fuller e KPSS no nível de 5% são -2,86 e 0,46, respectivamente. As linhas AR(1) e AR(2) apresentam os coeficientes do ajuste do Risco de Cauda a um processo autoregressivo de ordem 2. Entre parênteses os valores da estatística t .

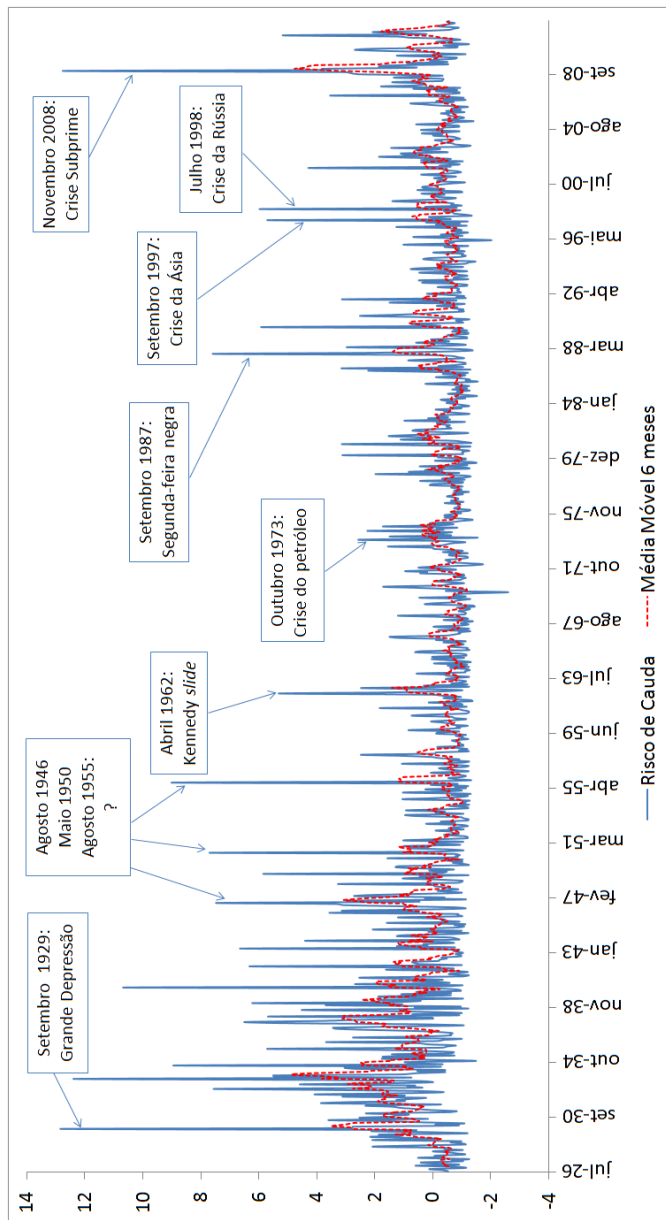


Figura 1: Série temporal do Risco de Cauda.

Esta figura apresenta a evolução temporal do Risco de Cauda entre julho de 1926 e setembro de 2012 (linha azul). A linha vermelha é a média móvel de seis meses do Risco de Cauda. Em destaque, eventos de elevações abruptas do Risco de Cauda.

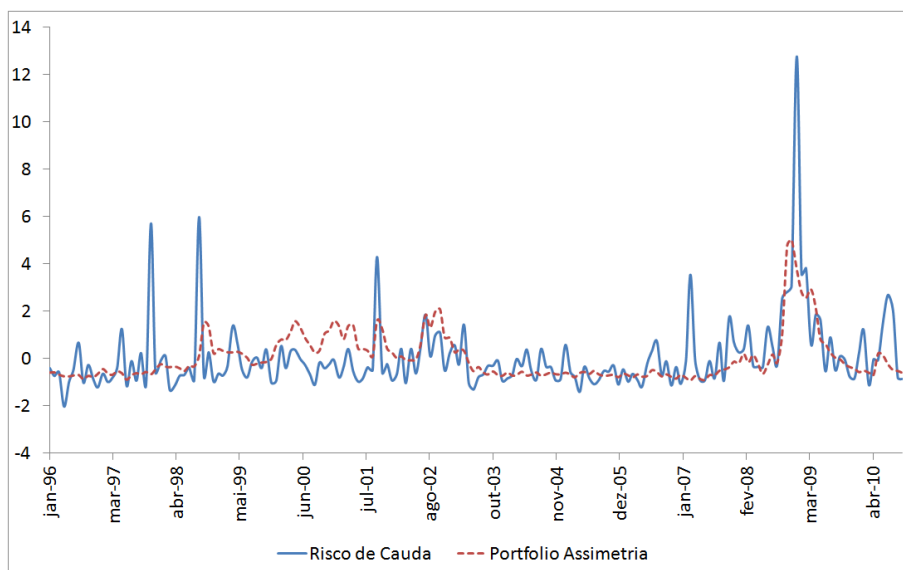


Figura 2: Risco de Cauda e Portfolio Assimetria.

Esta figura apresenta a evolução temporal da nossa medida de risco de cauda (linha azul) e da média dos preços de portfolios assimetria delta-vega neutros sobre 74 ações (linha vermelha) entre janeiro de 1996 e outubro de 2010. Um portfolio assimetria consiste na compra de uma *put out-of-the-money* e na venda de uma *call out-of-the-money*.

Variável	Valor	Estatística t	p -value
K	0,0017	1,26	0,2068
TR_{t-1}	-0,0063	-7,15	0,0000
M_{t-1}	0,1944	6,15	0,0000
R^2	0,1239		
R^2 ajustado	0,1212		
Durbin-Watson	1,90		

Tabela 2: Relação Retorno de Mercado - Risco de Cauda.

Esta tabela apresenta os resultados da regressão $M_t = \beta TR_{t-1} + \theta M_{t-1} + K + \epsilon_t$. O erro dos estimadores foi calculado de acordo com Newey e West (1987).

Variável	Valor	Estatística t	p -value
K	0,0050	5,91	0,0000
TR_{t-1}	-0,0020	-2,96	0,0034
C_{t-1}	0,3067	4,96	0,0000
C_{t-2}	0,1340	1,71	0,0883
C_{t-3}	-0,0756	- 1,14	0,2536
C_{t-4}	-0,0874	-1,26	0,2072
R^2	0,1926		
R^2 ajustado	0,1766		
Durbin-Watson	2,05		

Tabela 3: Relação Consumo - Risco de Cauda.

Esta tabela apresenta os resultados da regressão $C_t = \beta TR_{t-1} + \theta_1 C_{t-1} + \theta_2 C_{t-2} + \theta_3 C_{t-3} + \theta_4 C_{t-4} + K + \epsilon_t$. O erro dos estimadores foi calculado de acordo com Newey e West (1987).

Banco Central do Brasil

Trabalhos para Discussão

Os Trabalhos para Discussão do Banco Central do Brasil estão disponíveis para download no website
<http://www.bcb.gov.br/?TRABDISCLISTA>

Working Paper Series

The Working Paper Series of the Central Bank of Brazil are available for download at
<http://www.bcb.gov.br/?WORKINGPAPERS>

- | | | |
|------------|---|----------|
| 284 | On the Welfare Costs of Business-Cycle Fluctuations and Economic-Growth Variation in the 20th Century
<i>Osmani Teixeira de Carvalho Guillén, João Victor Issler and Afonso Arinos de Mello Franco-Neto</i> | Jul/2012 |
| 285 | Asset Prices and Monetary Policy – A Sticky-Dispersed Information Model
<i>Marta Areosa and Waldyr Areosa</i> | Jul/2012 |
| 286 | Information (in) Chains: information transmission through production chains
<i>Waldyr Areosa and Marta Areosa</i> | Jul/2012 |
| 287 | Some Financial Stability Indicators for Brazil
<i>Adriana Soares Sales, Waldyr D. Areosa and Marta B. M. Areosa</i> | Jul/2012 |
| 288 | Forecasting Bond Yields with Segmented Term Structure Models
<i>Caio Almeida, Axel Simonsen and José Vicente</i> | Jul/2012 |
| 289 | Financial Stability in Brazil
<i>Luiz A. Pereira da Silva, Adriana Soares Sales and Wagner Piazza Gaglianone</i> | Aug/2012 |
| 290 | Sailing through the Global Financial Storm: Brazil's recent experience with monetary and macroprudential policies to lean against the financial cycle and deal with systemic risks
<i>Luiz Awazu Pereira da Silva and Ricardo Eyer Harris</i> | Aug/2012 |
| 291 | O Desempenho Recente da Política Monetária Brasileira sob a Ótica da Modelagem DSGE
<i>Bruno Freitas Boynard de Vasconcelos e José Angelo Divino</i> | Set/2012 |
| 292 | Coping with a Complex Global Environment: a Brazilian perspective on emerging market issues
<i>Adriana Soares Sales and João Barata Ribeiro Blanco Barroso</i> | Oct/2012 |
| 293 | Contagion in CDS, Banking and Equity Markets
<i>Rodrigo César de Castro Miranda, Benjamin Miranda Tabak and Mauricio Medeiros Junior</i> | Oct/2012 |
| 293 | Contágio nos Mercados de CDS, Bancário e de Ações
<i>Rodrigo César de Castro Miranda, Benjamin Miranda Tabak e Mauricio Medeiros Junior</i> | Out/2012 |

294	Pesquisa de Estabilidade Financeira do Banco Central do Brasil <i>Solange Maria Guerra, Benjamin Miranda Tabak e Rodrigo César de Castro Miranda</i>	Out/2012
295	The External Finance Premium in Brazil: empirical analyses using state space models <i>Fernando Nascimento de Oliveira</i>	Oct/2012
296	Uma Avaliação dos Recolhimentos Compulsórios <i>Leonardo S. Alencar, Tony Takeda, Bruno S. Martins e Paulo Evandro Dawid</i>	Out/2012
297	Avaliando a Volatilidade Diária dos Ativos: a hora da negociação importa? <i>José Valentim Machado Vicente, Gustavo Silva Araújo, Paula Baião Fisher de Castro e Felipe Noronha Tavares</i>	Nov/2012
298	Atuação de Bancos Estrangeiros no Brasil: mercado de crédito e de derivativos de 2005 a 2011 <i>Raquel de Freitas Oliveira, Rafael Felipe Schiozer e Sérgio Leão</i>	Nov/2012
299	Local Market Structure and Bank Competition: evidence from the Brazilian auto loan market <i>Bruno Martins</i>	Nov/2012
299	Estrutura de Mercado Local e Competição Bancária: evidências no mercado de financiamento de veículos <i>Bruno Martins</i>	Nov/2012
300	Conectividade e Risco Sistêmico no Sistema de Pagamentos Brasileiro <i>Benjamin Miranda Tabak, Rodrigo César de Castro Miranda e Sergio Rubens Stancato de Souza</i>	Nov/2012
300	Connectivity and Systemic Risk in the Brazilian National Payments System <i>Benjamin Miranda Tabak, Rodrigo César de Castro Miranda and Sergio Rubens Stancato de Souza</i>	Nov/2012
301	Determinantes da Captação Líquida dos Depósitos de Poupança <i>Clodoaldo Aparecido Annibal</i>	Dez/2012
302	Stress Testing Liquidity Risk: the case of the Brazilian Banking System <i>Benjamin M. Tabak, Solange M. Guerra, Rodrigo C. Miranda and Sergio Rubens S. de Souza</i>	Dec/2012
303	Using a DSGE Model to Assess the Macroeconomic Effects of Reserve Requirements in Brazil <i>Waldyr Dutra Areosa and Christiano Arrigoni Coelho</i>	Jan/2013
303	Utilizando um Modelo DSGE para Avaliar os Efeitos Macroeconômicos dos Recolhimentos Compulsórios no Brasil <i>Waldyr Dutra Areosa e Christiano Arrigoni Coelho</i>	Jan/2013
304	Credit Default and Business Cycles: an investigation of this relationship in the Brazilian corporate credit market <i>Jaqueline Terra Moura Marins and Myrian Beatriz Eiras das Neves</i>	Mar/2013

- 304 Inadimplência de Crédito e Ciclo Econômico: um exame da relação no mercado brasileiro de crédito corporativo** Mar/2013
Jaqueline Terra Moura Marins e Myrian Beatriz Eiras das Neves
- 305 Preços Administrados: projeção e repasse cambial** Mar/2013
Paulo Roberto de Sampaio Alves, Francisco Marcos Rodrigues Figueiredo, Antonio Negromonte Nascimento Junior e Leonardo Pio Perez
- 306 Complex Networks and Banking Systems Supervision** May/2013
Theophilos Papadimitriou, Periklis Gogas and Benjamin M. Tabak
- 306 Redes Complexas e Supervisão de Sistemas Bancários** Maio/2013
Theophilos Papadimitriou, Periklis Gogas e Benjamin M. Tabak
- 307 Risco Sistêmico no Mercado Bancário Brasileiro – Uma abordagem pelo método CoVaR** Jul/2013
Gustavo Silva Araújo e Sérgio Leão
- 308 Transmissão da Política Monetária pelos Canais de Tomada de Risco e de Crédito: uma análise considerando os seguros contratados pelos bancos e o spread de crédito no Brasil** Jul/2013
Debora Pereira Tavares, Gabriel Caldas Montes e Osmani Teixeira de Carvalho Guillén
- 309 Converting the NPL Ratio into a Comparable Long Term Metric** Jul/2013
Rodrigo Lara Pinto Coelho and Gilneu Francisco Astolfi Vivan
- 310 Banks, Asset Management or Consultancies' Inflation Forecasts: is there a better forecaster out there?** Jul/2013
Tito Nícias Teixeira da Silva Filho